

**Τράπεζα Θεμάτων (ΙΕΠ)
Άλγεβρα Α΄ Λυκείου**

Εκφωνήσεις - Λύσεις



2024-2025

Ασκησόπολις

Στέλιος Μιχαήλογλου / Δημήτρης Πατσιμάς / Νίκος Τούντας

www.Askisopolis.gr



Τα θέματα προέρχονται από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (<http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida>)

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Οι πράξεις των πραγματικών αριθμών και οι ιδιότητές τους

2^ο Θέμα

12685. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \neq 0$ ισχύει ότι: $(\alpha + \beta) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) = 4$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2$ **β)** $\alpha = \beta$

Λύση

α) $(\alpha + \beta) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) = 4 \Leftrightarrow \alpha \frac{1}{\alpha} + \alpha \frac{1}{\beta} + \beta \frac{1}{\alpha} + \beta \frac{1}{\beta} = 4 \Leftrightarrow 1 + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + 1 = 4 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2$

β) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2 \Leftrightarrow \alpha \beta \frac{\alpha}{\beta} + \alpha \beta \frac{\beta}{\alpha} = 2\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$

13088. Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί.

Ορίζουμε $A = 2(x + y)^2 - (x - y)^2 - 6xy - y^2$.

α) Να αποδείξετε ότι: $A = x^2$.

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B = 2 \cdot 2022^2 - 2020^2 - 6 \cdot 2021 - 1$ είναι ίσος με το τετράγωνο φυσικού αριθμού τον οποίο να προσδιορίσετε.

Λύση

α) $A = 2(x + y)^2 - (x - y)^2 - 6xy - y^2 = 2(x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 - 2xy + y^2) - 6xy - y^2 =$
 $= 2x^2 + 4xy + 2y^2 - x^2 + 2xy - y^2 - 6xy - y^2 = 2x^2 + \cancel{6xy} + \cancel{2y^2} - x^2 - \cancel{6xy} - \cancel{2y^2} = x^2$

β) Για $x = 2021$ και $y = 1$ η παράσταση A γίνεται:

$$A = 2(2021 + 1)^2 - (2021 - 1)^2 - 6 \cdot 2021 \cdot 1 - 1^2 = 2 \cdot 2022^2 - 2020^2 - 6 \cdot 2021 - 1 = B.$$

Όμως $A = x^2$ και για $x = 2021$ είναι $A = 2021^2$, οπότε

$$B = 2 \cdot 2022^2 - 2020^2 - 6 \cdot 2021 - 1 = 2021^2$$

Επομένως ο αριθμός B είναι ίσος με το τετράγωνο του 2021.

13053. Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ και $\alpha\beta\gamma \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι: **i.** $\beta + \gamma = -\alpha$. **ii.** $\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} = -\alpha$

β) Με παρόμοιο τρόπο να απλοποιήσετε τα κλάσματα $\frac{\beta^2}{\gamma + \alpha}$, $\frac{\gamma^2}{\alpha + \beta}$ και να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} + \frac{\beta^2}{\gamma + \alpha} + \frac{\gamma^2}{\alpha + \beta} = 0.$$

Λύση

α) i. $\alpha + \beta + \gamma = 0 \Leftrightarrow \beta + \gamma = -\alpha$

ii. $\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} = \frac{\alpha^2}{-\alpha} = -\alpha$

β) Είναι $\alpha + \beta + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha + \gamma = -\beta$ και $\alpha + \beta = -\gamma$

$$\frac{\beta^2}{\gamma + \alpha} = \frac{\beta^2}{-\beta} = -\beta, \quad \frac{\gamma^2}{\alpha + \beta} = \frac{\gamma^2}{-\gamma} = -\gamma$$

$$\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} + \frac{\beta^2}{\gamma + \alpha} + \frac{\gamma^2}{\alpha + \beta} = -\alpha - \beta - \gamma = -(\alpha + \beta + \gamma) = 0$$

13472. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, για τους οποίους ισχύουν $\alpha^2 = 2\alpha + \beta$ και $\beta^2 = 2\beta + \alpha$.

α) Να αποδείξετε ότι: **i.** $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha - \beta$. **ii.** $\alpha + \beta = 1$

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 + \beta^2$.

Λύση

α) i) $\alpha^2 - \beta^2 = 2\alpha + \beta - (2\beta + \alpha) = 2\alpha + \beta - 2\beta - \alpha = \alpha - \beta$

ii) Είναι $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha - \beta \Leftrightarrow (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = (\alpha - \beta) \stackrel{\alpha \neq \beta}{\Leftrightarrow} \alpha + \beta = 1$

β) $\alpha^2 + \beta^2 = 2\alpha + \beta + 2\beta + \alpha = 3\alpha + 3\beta = 3(\alpha + \beta) = 3 \cdot 1 = 3$

14458. Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $(x + 4y)(x + y) = 9xy$.

α) Να αποδείξετε ότι: **i)** $(2y - x)^2 = 0$ **ii)** $y = \frac{x}{2}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\left(2y - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(2y + \frac{x}{2}\right)^2 = 10y^2$.

Λύση

α) i) $(x + 4y)(x + y) = 9xy \Leftrightarrow x^2 + xy + 4xy + 4y^2 = 9xy \Leftrightarrow x^2 - 4xy + 4y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2y)^2 = 0$

ii) Είναι $(x - 2y)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 2y = 0 \Leftrightarrow 2y = x \Leftrightarrow y = \frac{x}{2}$

β) $\left(2y - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(2y + \frac{x}{2}\right)^2 = 10y^2 \Leftrightarrow (2y - y)^2 + (2y + y)^2 = 10y^2 \Leftrightarrow$

$y^2 + 9y^2 = 10y^2 \Leftrightarrow 10y^2 = 10y^2$ ισχύει.

14473. Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει: $\frac{4x+5y}{x-4y} = -2$.

α) Να αποδείξετε ότι: $y = 2x$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{2x^2 + 3y^2 + xy}{xy}$.

Λύση

α) $\frac{4x+5y}{x-4y} = -2 \Leftrightarrow 4x+5y = -2(x-4y) \Leftrightarrow 4x+5y = -2x+8y \Leftrightarrow 6x = 3y \Leftrightarrow y = 2x$

β) $A = \frac{2x^2 + 3y^2 + xy}{xy}$ και για $y = 2x$ έχουμε:

$$A = \frac{2x^2 + 3(2x)^2 + x(2x)}{x(2x)} = \frac{2x^2 + 3(4x^2) + 2x^2}{2x^2} = \frac{2x^2 + 12x^2 + 2x^2}{2x^2} = \frac{16x^2}{2x^2} = 8$$

14489. Αν οι αριθμοί $2\alpha - 1$ και $\beta - 1$ είναι αντίστροφοι, με $\alpha \neq 1$ και $\beta \neq 1$ να δείξετε ότι:

α) $2\alpha + \beta = 2\alpha\beta$.

β) Οι αριθμοί $x = \alpha - \beta$ και $y = \alpha(1 - 2\beta) + 2\beta$ είναι αντίθετοι.

Λύση

α) Αφού οι αριθμοί $2\alpha - 1$ και $\beta - 1$ είναι αντίστροφοι, με $\alpha \neq 1$ και $\beta \neq 1$ τότε ισχύει

$$(2\alpha - 1)(\beta - 1) = 1 \Leftrightarrow 2\alpha\beta - 2\alpha - \beta + 1 = 1 \Leftrightarrow 2\alpha\beta = 2\alpha + \beta$$

β) Αρκεί να δείξουμε ότι $x = -y \Leftrightarrow x + y = 0$

Πράγματι $x + y = \alpha - \beta + \alpha(1 - 2\beta) + 2\beta = \alpha - \beta + \alpha - 2\alpha\beta + 2\beta = 2\alpha + \beta - 2\alpha\beta = 0$ αφού $2\alpha\beta = 2\alpha + \beta$

14555. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση $(x - 2y)^2 - 2(3 - 2xy) = 5y^2 - 1$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 - y^2 = 5$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $P = (x + y)^3 (x - y)^3$.

Λύση

α) $(x - 2y)^2 - 2(3 - 2xy) = 5y^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 - 4xy + 4y^2 - 6 + 4xy = 5y^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 5$

β) $P = (x + y)^3 (x - y)^3 = [(x + y)(x - y)]^3 = (x^2 - y^2)^3 = 5^3 = 125$

35388. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να ισχύουν: $\frac{\alpha + \beta}{\beta} = 4$
και $\frac{\gamma}{\delta - \gamma} = \frac{1}{4}$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3\beta$ και $\delta = 5\gamma$.

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\Pi = \frac{\alpha\gamma + \beta\gamma}{\beta\delta - \beta\gamma}$.

Λύση

$$\alpha) \frac{\alpha + \beta}{\beta} = 4 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 4\beta \Leftrightarrow \alpha = 3\beta \text{ και } \frac{\gamma}{\delta - \gamma} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \delta - \gamma = 4\gamma \Leftrightarrow \delta = 5\gamma$$

$$\beta) \Pi = \frac{\alpha\gamma + \beta\gamma}{\beta\delta - \beta\gamma} = \frac{\gamma(\alpha + \beta)}{\beta(\delta - \gamma)} \stackrel{(\text{αερώτημα})}{=} \frac{\gamma(3\beta + \beta)}{\beta(5\gamma - \gamma)} = \frac{4\beta\gamma}{4\beta\gamma} = 1$$

4^ο Θέμα

15052. Στο διπλανό σχήμα το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έχει πλευρά ίση με 6 και οι ευθείες EZ και $H\Theta$ είναι παράλληλες στις πλευρές του. Αν $KZ = x$ και $KH = y$, $x, y \in (0, 6)$, τότε:

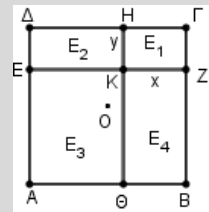
α) Να υπολογίσετε τα E_1, E_2, E_3, E_4 με τη βοήθεια των x, y .

β) Να βρείτε τα εμβαδά E_1, E_2, E_3, E_4 των τεσσάρων ορθογωνίων του σχήματος όταν $x = 4$ και $y = 2$.

γ) Αν επιπλέον ισχύει $E_1 + E_3 = E_2 + E_4$, να αποδείξετε ότι:

i. $xy + 9 = 3(x + y)$.

ii. Τουλάχιστον ένα από τα τμήματα EZ και $H\Theta$ διέρχεται από το κέντρο O του τετραγώνου.



Λύση

$$\alpha) E_1 = (KZ)(KH) = xy, E_2 = (KE)(KH) = (6 - x)y$$

$$E_3 = (KE)(K\Theta) = (6 - x)(6 - y), E_4 = (KZ)(ZB) = x(6 - y)$$

β) Για $x = 4$ και $y = 2$ είναι $E_1 = 4 \cdot 2 = 8$,

$$E_2 = (6 - 4) \cdot 2 = 4, E_3 = (6 - 4)(6 - 2) = 2 \cdot 4 = 8 \text{ και } E_4 = 4(6 - 2) = 4 \cdot 4 = 16$$

$$\gamma) \text{ i. } E_1 + E_3 = E_2 + E_4 \Leftrightarrow xy + (6 - x)(6 - y) = (6 - x)y + x(6 - y) \Leftrightarrow$$

$$xy + 36 - 6y - 6x + xy = 6y - xy + 6x - xy \Leftrightarrow 2xy - 6y - 6x + 36 = -2xy + 6y + 6x \Leftrightarrow$$

$$2xy + 2xy + 36 = 6y + 6x + 6x + 6y \Leftrightarrow 4xy + 36 = 12x + 12y \Leftrightarrow$$

$$4(xy + 9) = 12(x + y) \Leftrightarrow xy + 9 = \frac{12(x + y)}{4} \Leftrightarrow xy + 9 = 3(x + y).$$

$$\text{ii. } xy + 9 = 3(x + y) \Leftrightarrow xy + 9 - 3x - 3y = 0 \Leftrightarrow x(y - 3) - 3(y - 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(y - 3)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow (y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = 3) \text{ ή } (x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3).$$

Αν $x = 3$ τότε $KE = KZ = 3$ τότε $\Delta H = H\Gamma$ και $A\Theta = \Theta B$, οπότε η $H\Theta$ ενώνει τα μέσα δύο απέναντι πλευρών του τετραγώνου άρα διέρχεται από το κέντρο του τετραγώνου.

Αν $y = 3$ τότε $KH=K\Theta=3$ τότε $\Delta E=EA$ και $\Gamma Z=Z\Theta$, οπότε η EZ ενώνει τα μέσα δύο απέναντι πλευρών του τετραγώνου άρα διέρχεται από το κέντρο του τετραγώνου.

3^ο Θέμα

14329. Δίνονται οι αλγεβρικές παραστάσεις $A = \frac{-\alpha}{\beta}$, $B = \alpha^2$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές των πραγματικών αριθμών α , β οι αλγεβρικές παραστάσεις A, B είναι πραγματικοί αριθμοί διαφορετικοί του 0.

β) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί A, B είναι αντίθετοι, αν και μόνο, αν οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι.

Λύση

α) Αρχικά για να ορίζεται η παράσταση A πρέπει $\beta \neq 0$.

$$A \neq 0 \Leftrightarrow \frac{-\alpha}{\beta} \neq 0 \Leftrightarrow -\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \quad \text{και} \quad B \neq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0.$$

β) Όταν οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι, τότε $\alpha\beta=1 \Leftrightarrow \beta=\frac{1}{\alpha}$. Τότε

$$A = \frac{-\alpha}{\frac{1}{\alpha}} = -\alpha^2 \quad \text{και} \quad A+B = -\alpha^2 + \alpha^2 = 0, \quad \text{οπότε οι αριθμοί } A, B \text{ είναι αντίθετοι.}$$

Αντίστροφα: Αν οι αριθμοί A, B είναι αντίθετοι, τότε

$$A+B=0 \Leftrightarrow \frac{-\alpha}{\beta} + \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow -\alpha + \alpha^2\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha(-1 + \alpha\beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha=0 \text{ απορρίπτεται ή}$$

$$-1 + \alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta = 1, \text{ δηλαδή οι αριθμοί } \alpha, \beta \text{ είναι αντίστροφοι.}$$

Διάταξη πραγματικών αριθμών

Θέμα 2ο

12673. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $0 < \alpha < \beta$.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{3}{\beta} < \frac{3}{\alpha}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^3 + \frac{3}{\beta} < \beta^3 + \frac{3}{\alpha}$.

Λύση

α) Είναι $0 < \alpha < \beta$, άρα $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta} \Leftrightarrow \frac{3}{\alpha} > \frac{3}{\beta}$.

β) Είναι $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha^3 < \beta^3$ (1) και από το α σκέλος είναι $\frac{3}{\beta} < \frac{3}{\alpha}$ (2).

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) προκύπτει ότι $\alpha^3 + \frac{3}{\beta} < \beta^3 + \frac{3}{\alpha}$

12922. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \alpha^2 + \beta^2$ και $B = 2\alpha\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες $A = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι $A - B \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $A - B = 0$.

Λύση

α) $A = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ και $\beta = 0$.

β) Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ είναι $A - B = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2 \geq 0$.

γ) $A - B = 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$

13266. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + 4\alpha + 5$ και $B = (2\beta + 1)^2 - 1$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A = (\alpha + 2)^2 + 1$.

β) i. Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$.

ii. Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A + B = 0$;

Λύση

α) $A = \alpha^2 + 4\alpha + 5 = \alpha^2 + 4\alpha + 4 + 1 = (\alpha + 2)^2 + 1$

β) i. $A + B = (\alpha + 2)^2 + 1 + (2\beta + 1)^2 - 1 = (\alpha + 2)^2 + (2\beta + 1)^2 \geq 0$ γιατί για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ είναι $(\alpha + 2)^2 \geq 0$ και $(2\beta + 1)^2 \geq 0$.

ii. $A + B = 0 \Leftrightarrow (\alpha + 2)^2 + (2\beta + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (\alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -2)$ και $(2\beta + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\beta = -1 \Leftrightarrow \beta = -\frac{1}{2})$

13323. α) Να αποδείξετε ότι για οποιονδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2 + (y+4)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17.$$

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε:

$$x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17 = 0.$$

Λύση

$$\alpha) (x-1)^2 + (y+4)^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 8y + 16 = x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17$$

$$\beta) x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+4)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1=0 \Leftrightarrow x=1) \text{ και } (y+4=0 \Leftrightarrow y=-4)$$

14410. Δίνονται οι παραστάσεις A και B με $A = \alpha^2 + \alpha + \frac{1}{4}$ και $B = (\beta - 3)^2$.

α) i. Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

ii. Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α, β έτσι, ώστε $A + B = 0$.

β) Υπάρχουν τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε $A = -B$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) i. Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ είναι $A = \alpha^2 + \alpha + \frac{1}{4} = \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ και $B = (\beta - 3)^2 \geq 0$, άρα και $A + B \geq 0$.

ii. Είναι $A = 0 \Leftrightarrow \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$ και $B = 0 \Leftrightarrow (\beta - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \beta - 3 = 0 \Leftrightarrow \beta = 3$

Αν $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ ή $\beta \neq 3$ τότε $A > 0$ ή $B > 0$, οπότε $A + B > 0$ που απορρίπτεται.

Επομένως $A + B = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$ και $\beta = 3$.

β) $A = -B \Leftrightarrow A + B = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$ και $\beta = 3$.

14475. Αν α και β πραγματικοί αριθμοί με $2 \leq \alpha \leq 4$ και $-4 \leq \beta \leq -3$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha + 2\beta$

β) $\alpha - \beta$

Λύση

α) Είναι $2 \leq \alpha \leq 4$ (1) και $-4 \leq \beta \leq -3$ (2). Είναι (2) $\Leftrightarrow -8 \leq 2\beta \leq -6$ (3) και με προσθήκη κατά μέλη των (1),(3) είναι $2 - 8 \leq \alpha + 2\beta \leq 4 - 6 \Leftrightarrow -6 \leq \alpha + 2\beta \leq -2$

β) Είναι (2) $\Leftrightarrow 4 \geq -\beta \geq 3 \Leftrightarrow 3 \leq -\beta \leq 4$ (4) και με προσθήκη κατά μέλη των (1),(4) είναι $2 + 3 \leq \alpha - \beta \leq 4 + 4 \Leftrightarrow 5 \leq \alpha - \beta \leq 8$

14492. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$ τότε:

α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Λύση

α) Η περίμετρος ενός ορθογωνίου με πλευρές x και y δίνεται από την σχέση $\Pi = 2x + 2y = 2(x + y)$.

Είναι $4 \leq x \leq 7$ (1) και $2 \leq y \leq 3$ (2) και με πρόσθεση των (1), (2) κατά μέλη είναι

$$4 + 2 \leq x + y \leq 7 + 3 \Leftrightarrow 6 \leq x + y \leq 10 \Leftrightarrow 12 \leq 2(x + y) \leq 20 \Leftrightarrow 12 \leq \Pi \leq 20$$

β) Η περίμετρος ενός ορθογωνίου με πλευρές $x - 1$ και $3y$ δίνεται από την σχέση $\Pi = 2(x - 1) + 6y$.

Είναι (1) $\Leftrightarrow 3 \leq x - 1 \leq 6 \Leftrightarrow 6 \leq 2(x - 1) \leq 12$ (3) και (2) $\Leftrightarrow 12 \leq 6y \leq 18$ (4) και με πρόσθεση των

(3), (4) κατά μέλη είναι $6 + 12 \leq 2(x - 1) + 6y \leq 12 + 18 \Leftrightarrow 18 \leq \Pi \leq 30$.

14704. Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x + y$ **β)** $2x - 3y$ **γ)** $\frac{x}{y}$

Λύση

α) Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις $2 \leq x \leq 3$, $1 \leq y \leq 2$ και έχουμε: $3 \leq x + y \leq 5$.

β) Είναι $2 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow 4 \leq 2x \leq 6$ (1) και $1 \leq y \leq 2 \Leftrightarrow -3 \geq -3y \geq -6 \Leftrightarrow -6 \leq -3y \leq -3$ (2).

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) προκύπτει: $-2 \leq 2x - 3y \leq 3$.

γ) Είναι $2 \leq x \leq 3$ (3) και $1 \leq y \leq 2 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{y} \leq 1$ (4).

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις (3) και (4) προκύπτει: $2 \cdot \frac{1}{2} \leq x \cdot \frac{1}{y} \leq 3 \cdot 1 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{x}{y} \leq 3$.

35040. Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9$ και $\Lambda = 2\alpha(3 - \beta)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$.

β) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

γ) Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) $K - \Lambda = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9 - [2\alpha(3 - \beta)] = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9 - 6\alpha + 2\alpha\beta =$

$$= \alpha^2 + \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 6\alpha + 9 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + \alpha^2 - 6\alpha + 9 = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$$

β) $K - \Lambda = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + \alpha^2 - 6\alpha + 9 = (\alpha + \beta)^2 + (\alpha - 3)^2 \geq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

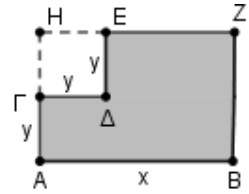
γ) $K = \Lambda \Leftrightarrow K - \Lambda = 0 \Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 + (\alpha - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\beta$ και $\alpha = 3$.

35549. Από το ορθογώνιο ABZH αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y.

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος EZBAΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: $\Pi = 2x + 4y$.

β) Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών

βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος.



Λύση

α) $\Pi = EZ + ZB + BA + AG + GD + DE = x + y + x + y + y + y = 2x + 4y$

β) $5 < x < 8 \Leftrightarrow 10 < 2x < 16$ (1), $1 < y < 2 \Leftrightarrow 4 < 4y < 8$ (2)

Προσθέτουμε τις (1) και (2) και έχουμε: $14 < 2x + 4y < 24 \Leftrightarrow 14 < \Pi < 24$

36884. α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10$$

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$.

Λύση

α) $(x-1)^2 + (y+3)^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10$

β) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ και $y+3=0 \Leftrightarrow y=-3$

36899. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β, με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$ β) $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right) \cdot \left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$

Λύση

α) $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4 \stackrel{(\alpha > 0)}{\Leftrightarrow} \alpha^2 + 4 \geq 4\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 2)^2 \geq 0$ το οποίο ισχύει.

β) Είναι $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$ (1) και όμοια $\beta + \frac{4}{\beta} \geq 4$ (2)

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη έχουμε $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right) \cdot \left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$.

37179. Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2$ και $\Lambda = 2\alpha\beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

β) Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$;

Λύση

α) $K \geq \Lambda \Leftrightarrow 2\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + (\alpha - \beta)^2 \geq 0$ το οποίο ισχύει αφού $\alpha^2 \geq 0$ και $(\alpha - \beta)^2 \geq 0$.

β) $K = \Lambda \Leftrightarrow K - \Lambda = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + (\alpha - \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ και $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$

37817. Δίνεται η παράσταση $A = x^4 + \frac{x^4 - 4}{x^2 - 2}$, $x \neq \pm\sqrt{2}$.

α) Να δείξετε ότι $A = x^4 + x^2 + 2$.

β) i. Να αιτιολογήσετε γιατί $A > 0$ για κάθε $x \neq \pm\sqrt{2}$.

ii. Για ποια τιμή του x η παράσταση A παίρνει τη μικρότερη τιμή της;

Λύση

α) Για $x \neq \pm\sqrt{2}$ είναι $A = x^4 + \frac{x^4 - 4}{x^2 - 2} = x^4 + \frac{(x^2 - 2)(x^2 + 2)}{x^2 - 2} = x^4 + x^2 + 2$.

β) i. Για $x \neq \pm\sqrt{2}$ είναι $x^4 \geq 0$ και $x^2 \geq 0$, είναι $x^4 + x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 2 \geq 2$, άρα $A > 0$.

ii. Για $x \neq \pm\sqrt{2}$ είναι $x^4 \geq 0$, $x^2 \geq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, άρα $A = x^4 + x^2 + 2 \geq 2$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, οπότε η ελάχιστη τιμή της παράστασης A είναι το 2 και ισχύει μόνο για $x = 0$.

Θέμα 4ο

14820.α) Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ανισότητες ισχύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύουν οι ισότητες.

i. $x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4}$ ii. $x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4}$

β) Να δείξετε ότι $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Δίνεται η παράσταση $A = \frac{(x^3 - 1)(x^3 + 1)}{x^2 - 1}$.

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση A .

ii. Με τη βοήθεια του β) i με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να εξετάσετε αν η παράσταση A μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{9}{16}$.

Λύση

α) i. $x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 4 \geq 3 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2x + 1)^2 \geq 0$ ισχύει. Η ισότητα

$x^2 + x + 1 = \frac{3}{4}$ ισχύει όταν $(2x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

ii. $x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 4 \geq 3 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 \geq 0$ το οποίο ισχύει. Η ισότητα

$x^2 - x + 1 = \frac{3}{4}$ ισχύει όταν $(2x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

β) Για κάθε $x \neq -\frac{1}{2}$ είναι $x^2 + x + 1 > \frac{3}{4}$ και για κάθε $x \neq \frac{1}{2}$ είναι $x^2 - x + 1 > \frac{3}{4}$.

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη είναι $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$.

Για $x = \frac{1}{2}$ είναι $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{7}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{21}{16} > \frac{9}{16}$ και για $x = -\frac{1}{2}$ είναι

$$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{4} = \frac{21}{16} > \frac{9}{16}.$$

Επομένως $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) i. Η παράσταση A ορίζεται όταν $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$

$$\text{ii. } A = \frac{(x^3 - 1)(x^3 + 1)}{x^2 - 1} = A = \frac{\cancel{(x-1)}(x^2 + x + 1)\cancel{(x+1)}(x^2 - x + 1)}{\cancel{(x-1)}\cancel{(x+1)}} \Leftrightarrow A = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16},$$

οπότε η παράσταση A δεν μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{9}{16}$.

Θέμα 3ο

14602. Αν $0 < \alpha < 1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha^3 < \alpha$.

β) Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: $0, \alpha^3, 1, \alpha, \frac{1}{\alpha}$.

Λύση

α) Για $0 < \alpha < 1$ είναι:

$$\alpha^3 < \alpha \Leftrightarrow \alpha^3 - \alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha^2 - 1) < 0 \text{ το οποίο ισχύει αφού } \alpha > 0 \text{ και } \alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha^2 < 1 \Leftrightarrow \alpha^2 - 1 < 0$$

β) Είναι $\alpha < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > 1$, τότε $0 < \alpha^3 < \alpha < 1 < \frac{1}{\alpha}$.

14713. Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\alpha^3 + 2\alpha^2 + 9\alpha + 18}{\alpha^2 + 2\alpha}$, $\alpha > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^3 + 2\alpha^2 + 9\alpha + 18 = (\alpha^2 + 9)(\alpha + 2)$.

β) Για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει:

$$\text{i. } A = \frac{\alpha^2 + 9}{\alpha}$$

ii. $A \geq 6$. Πότε ισχύει η ισότητα $A = 6$;

Λύση

$$\alpha) \alpha^3 + 2\alpha^2 + 9\alpha + 18 = \alpha^2(\alpha + 2) + 9(\alpha + 2) = (\alpha^2 + 9)(\alpha + 2)$$

$$\beta) \text{ i. } A = \frac{\alpha^3 + 2\alpha^2 + 9\alpha + 18}{\alpha^2 + 2\alpha} = \frac{(\alpha^2 + 9)\cancel{(\alpha + 2)}}{\alpha\cancel{(\alpha + 2)}} = \frac{\alpha^2 + 9}{\alpha}$$

$$\text{ii. } A \geq 6 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2 + 9}{\alpha} \geq 6 \Leftrightarrow \alpha^2 + 9 \geq 6\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 6\alpha + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 3)^2 \geq 0 \text{ το οποίο ισχύει.}$$

Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

Θέμα 2ο

12909. Δίνεται ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $|x-3| < 5$.

α) Να δείξετε ότι $x \in (-2, 8)$.

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει $|x-3| < 5$.

γ) Αν A το σύνολο που έχει στοιχεία τις ακέραιες τιμές του x που βρήκατε στο β) ερώτημα και B το σύνολο με $B = \{-3, -2, -1, 0, 3, 4\}$, να παραστήσετε τα σύνολα $A \cup B$ και $A \cap B$ με αναγραφή των στοιχείων τους.

Λύση

α) $|x-3| < 5 \Leftrightarrow -5 < x-3 < 5 \Leftrightarrow -2 < x < 8$

β) Οι ακέραιες τιμές του x είναι τα στοιχεία του συνόλου $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

γ) Είναι $A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ και $A \cap B = \{-1, 0, 3, 4\}$

13177. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β , για τους οποίους ισχύει $2 \leq \alpha \leq 3$ και $-2 \leq \beta \leq -1$.

α) Να δείξετε ότι: $|\alpha-3| = 3-\alpha$ και $|\beta+2| = \beta+2$.

β) Να δείξετε ότι: $0 \leq \alpha + \beta \leq 2$.

γ) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $|\alpha + \beta| + |\alpha - 3| - |\beta + 2|$ είναι ίση με 1.

Λύση

α) Είναι $2 \leq \alpha \leq 3 \Leftrightarrow 2-3 \leq \alpha-3 \leq 3-3 \Leftrightarrow -1 \leq \alpha-3 \leq 0$, άρα $|\alpha-3| = 3-\alpha$.

Είναι $-2 \leq \beta \leq -1 \Leftrightarrow -2+2 \leq \beta+2 \leq -1+2 \Leftrightarrow 0 \leq \beta+2 \leq 1$ άρα $|\beta+2| = \beta+2$.

β) Είναι $2 \leq \alpha \leq 3$ και $-2 \leq \beta \leq -1$, οπότε με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει $0 \leq \alpha + \beta \leq 2$.

γ) Επειδή $\alpha + \beta \geq 0$, $\alpha - 3 \leq 0$ και $\beta + 2 \geq 0$, είναι: $|\alpha + \beta| + |\alpha - 3| - |\beta + 2| = \alpha + \beta + 3 - \alpha - \beta - 2 = 1$

14071. α) Η αλγεβρική παράσταση K , που εκφράζει το άθροισμα των αποστάσεων του αριθμού x από τους αριθμούς 2 και -1, πάνω στον άξονα είναι:

A. $K = |x+1| + |x-2|$

B. $K = |x-1| + |x+2|$

Γ. $K = (|x|+1) + (|x|-2)$

Να γράψετε στο τετράδιό σας τη σωστή παράσταση και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Αν είναι $K = |x+1| + |x-2|$ τότε:

i) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης K όταν $x = \frac{3}{2}$.

ii) Αν $x > 2$ να γράψετε χωρίς απόλυτο την παράσταση K και να αποδείξετε ότι $K > 3$.

Λύση

α) A. $K = d(x, -1) + d(x, 2) = |x+1| + |x-2|$

β) i. Για $x = \frac{3}{2}$ είναι: $K = \left| \frac{3}{2} + 1 \right| + \left| \frac{3}{2} - 2 \right| = \left| \frac{3}{2} + \frac{2}{2} \right| + \left| \frac{3}{2} - \frac{4}{2} \right| = \left| \frac{5}{2} \right| + \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$

ii. Αν $x > 2$, τότε $x+1 > 3 > 0$ και $x-2 > 0$, οπότε $K = |x+1| + |x-2| = x+1 + x-2 = 2x-1$.

Είναι $x > 2 \Leftrightarrow 2x > 4 \Leftrightarrow 2x-1 > 3 \Leftrightarrow K > 3$.

14412. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha > \beta$, με $\beta > 1$ και $\alpha > 1$ τότε:

α) Να δείξετε ότι $\frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} - \frac{|1 - \alpha|}{1 - \alpha} = 2$.

β) Να δείξετε $\alpha + \beta > \frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} - \frac{|1 - \alpha|}{1 - \alpha}$.

Λύση

α) Είναι $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$ και $\alpha > 1 \Leftrightarrow 1 - \alpha < 0$ άρα είναι:

$$\frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} - \frac{|1 - \alpha|}{1 - \alpha} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta} - \frac{-(1 - \alpha)}{1 - \alpha} = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$$

β) Είναι $\alpha > 1$ και $\beta > 1$ άρα $\alpha + \beta > 1 + 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta > 2$ όμως από το προηγούμενο ερώτημα είναι

$$\frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} - \frac{|1 - \alpha|}{1 - \alpha} = 2, \text{ άρα } \alpha + \beta > \frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} - \frac{|1 - \alpha|}{1 - \alpha}.$$

14491. α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y - 3| < 1$.

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή του εμβαδού E του ορθογωνίου.

Λύση

α) $|y - 3| < 1 \Leftrightarrow -1 < y - 3 < 1 \Leftrightarrow 2 < y < 4$

β) Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με πλευρές x και y αντίστοιχα δίνεται από την σχέση $E = xy$. Είναι $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$ άρα πολλαπλασιάζοντας τις ανισότητες κατά μέλη (αφού όλοι οι όροι είναι θετικοί και έχουν ίδια φορά) προκύπτει $2 < E < 12$.

14572. Δίνεται πραγματικός αριθμός x , για τον οποίο ισχύει: $|x + 2| < 1$. Να δείξετε ότι:

α) $-3 < x < -1$.

β) $|2x + 4| < 2$.

Λύση

α) $|x + 2| < 1 \Leftrightarrow -1 < x + 2 < 1 \Leftrightarrow -3 < x < -1$

β) $|x + 2| < 1 \Leftrightarrow 2|x + 2| < 2 \Leftrightarrow |2(x + 2)| < 2 \Leftrightarrow |2x + 4| < 2$

14599. Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x| < 2$, τότε:

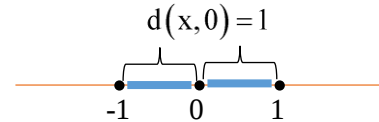
α) Να αποδείξετε ότι $-1 < x < 1$.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (-1, 1)$ ισχύει $x^2 < 1$.

Λύση

α) $|2x| < 2 \Leftrightarrow 2|x| < 2 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow d(x, 0) < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

β) $|x| < 1 \Leftrightarrow |x|^2 < 1^2 \Leftrightarrow x^2 < 1$



14617. Δίνεται η ανίσωση $|x - 7| < 1$ (I).

α) Να αποδείξετε ότι $x \in (6, 8)$.

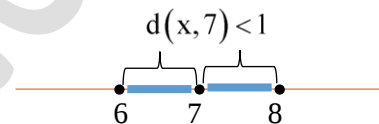
β) Αν γνωρίζουμε ότι $k \in (6, 8)$, να αποδείξετε ότι $\frac{24}{k} \in (3, 4)$.

Λύση

α) $|x - 7| < 1 \Leftrightarrow -1 < x - 7 < 1 \Leftrightarrow 7 - 1 < x < 7 + 1 \Leftrightarrow 6 < x < 8$, δηλαδή $x \in (6, 8)$.

β) $k \in (6, 8) \Leftrightarrow 6 < k < 8 \Leftrightarrow \frac{1}{6} > \frac{1}{k} > \frac{1}{8} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{8} < \frac{1}{k} < \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{24}{8} < \frac{24}{k} < \frac{24}{6} \Leftrightarrow 3 < \frac{24}{k} < 4 \Leftrightarrow \frac{24}{k} \in (3, 4)$.



15054. Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $\alpha < 0 < \beta < \gamma$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί ο αριθμός $A = \alpha(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)\beta$ είναι θετικός.

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha + |\alpha - \beta| + |\gamma - \beta| - \gamma = 0$.

Λύση

α) Είναι $\alpha < 0$, $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta < 0$, $\gamma > \beta \Leftrightarrow \gamma - \beta > 0$ και $\beta > 0$, άρα $A > 0$.

β) $\alpha + |\alpha - \beta| + |\gamma - \beta| - \gamma = \alpha - \alpha + \beta + \gamma - \beta - \gamma = 0$.

35041. Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x, 3) = 3 - 2x$.

α) Να αποδείξετε ότι $x \leq \frac{3}{2}$.

β) Αν $x \leq \frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K = |2x - 3| - 2|3 - x|$ είναι ανεξάρτητη του x .

Λύση

α) $d(2x, 3) = 3 - 2x \Leftrightarrow |2x - 3| = 3 - 2x$, το οποίο ισχύει όταν $2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow 2x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$.

β) Από (α) ερώτημα είναι $|2x - 3| = 3 - 2x$. $x \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x \leq 3 \Leftrightarrow -2x \geq -3 \Leftrightarrow 6 - 2x \geq 3 > 0$

Άρα $|6 - 2x| = 6 - 2x$ και $K = |2x - 3| - 2|3 - x| = |2x - 3| - |6 - 2x| = 3 - 2x - (6 - 2x) = 3 - 2x - 6 + 2x = -3$
Επομένως η παράσταση K ανεξάρτητη του x .

35043. Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x-2| < 3$

α) Να αποδείξετε ότι: $-1 < x < 5$.

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|x+1| + |x-5|}{3}$.

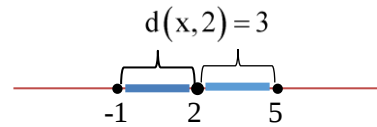
Λύση

$$\alpha) |x-2| < 3 \Leftrightarrow -3 < x-2 < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 5$$

β) Από (α) ερώτημα έχουμε

$$x > -1 \Leftrightarrow x+1 > 0 \Leftrightarrow |x+1| = x+1 \text{ και } x-5 < 0 \Leftrightarrow |x-5| = -x+5.$$

$$\text{Άρα } K = \frac{|x+1| + |x-5|}{3} = \frac{\cancel{x}+1 + \cancel{-x}+5}{3} = \frac{6}{3} = 2$$



35044. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί y , για τους οποίους ισχύει $|y-2| < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι: $y \in (1, 3)$.

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|y-1| + |y-3|}{2}$.

Λύση

$$\alpha) |y-2| < 1 \Leftrightarrow -1 < y-2 < 1 \Leftrightarrow 1 < y < 3 \Leftrightarrow y \in (1, 3)$$

β) Από (α) ερώτημα έχουμε $y > 1 \Leftrightarrow y-1 > 0 \Leftrightarrow |y-1| = y-1$ και $y < 3 \Leftrightarrow y-3 < 0 \Leftrightarrow |y-3| = -y+3$

$$\text{Άρα } K = \frac{|y-1| + |y-3|}{2} = \frac{\cancel{y}-1 + \cancel{-y}+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

35112. Δίνεται η παράσταση: $A = |3x-6| + 2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) για κάθε $x \geq 2$ είναι $A = 3x-4$

ii) για κάθε $x < 2$ είναι $A = 8-3x$.

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$ να αποδείξετε ότι: $\frac{9x^2-16}{|3x-6|+2} = 3x+4$.

Λύση

$$\alpha) \text{ i) } x \geq 2 \Leftrightarrow 3x \geq 6 \Leftrightarrow 3x-6 \geq 0 \text{ και } |3x-6| = 3x-6. \text{ Άρα } A = 3x-6+2 = 3x-4$$

$$\text{ii) } x < 2 \Leftrightarrow 3x < 6 \Leftrightarrow 3x-6 < 0 \text{ και } |3x-6| = -3x+6. \text{ Άρα } A = -3x+6+2 = -3x+8 = 8-3x$$

$$\beta) \frac{9x^2-16}{|3x-6|+2} = \frac{(3x-4)(3x+4)}{A} \stackrel{x \geq 2}{=} \frac{\cancel{(3x-4)}(3x+4)}{\cancel{3x-4}} = 3x+4.$$

35404. α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y-3| < 1$.

β) Αν για τους x, y ισχύουν $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να αποδείξετε ότι $3 < x+y < 7$.

Λύση

α) $|y-3| < 1 \Leftrightarrow -1 < y-3 < 1 \Leftrightarrow 2 < y < 4$

β) Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο ανισότητες και προκύπτει το ζητούμενο.

35412. Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$:

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x-5|$ και $|x-10|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10}$.

Λύση

α) Είναι $5 < x < 10$, άρα $x-5 > 0 \Leftrightarrow |x-5| = x-5$ και $x-10 < 0 \Leftrightarrow |x-10| = -x+10$

$$\beta) A = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10} = \frac{x-5}{x-5} + \frac{-x+10}{x-10} = \frac{\cancel{x}-5}{\cancel{x}-5} - \frac{\cancel{x}-10}{\cancel{x}-10} = 1-1=0$$

35415. Δίνεται η παράσταση: $A = |x-1| - |x-2|$.

α) Για $1 < x < 2$, να δείξετε ότι: $A = 2x - 3$.

β) Για $x < 1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε.

Λύση

α) Είναι $1 < x < 2$, άρα $x-1 > 0 \Leftrightarrow |x-1| = x-1$ και $x-2 < 0 \Leftrightarrow |x-2| = -x+2$.

$$\text{Άρα } A = x-1 - (-x+2) = x-1+x-2 = 2x-3$$

β) Είναι $x < 1 \Leftrightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow |x-1| = -x+1$ και $x-2 < -1 < 0 \Rightarrow |x-2| = -x+2$

$$\text{Άρα } A = -x+1 - (-x+2) = \cancel{-x}+1+\cancel{x}-2 = -1$$

36777. Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y , για τα οποία ισχύουν: $|x-3| \leq 2$ και $|y-6| \leq 4$.

α) Να δείξετε ότι: $1 \leq x \leq 5$ και $2 \leq y \leq 10$.

β) Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $2x$ και y .

Λύση

α) Είναι $|x-3| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x-3 \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 5$ και $|y-6| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq y-6 \leq 4 \Leftrightarrow 2 \leq y \leq 10$

β) Αν Π η περίμετρος τότε $\Pi = 4x + 2y$. Είναι $1 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow 4 \leq 4x \leq 20$ (1), $2 \leq y \leq 10 \Leftrightarrow 4 \leq 2y \leq 20$ (2) και με πρόσθεση των (1) και (2) έχουμε $8 \leq 4x + 2y \leq 40 \Leftrightarrow 8 \leq \Pi \leq 40$.

Άρα η μικρότερη τιμή της περιμέτρου είναι 8 και η μεγαλύτερη τιμή είναι 40.

36894. α) Αν $\alpha < 0$, να αποδειχθεί ότι: $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$.

β) Αν $\alpha < 0$, να αποδειχθεί ότι: $|\alpha| + \left| \frac{1}{\alpha} \right| \geq 2$.

Λύση

$$\alpha) \alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2 \Leftrightarrow \alpha^2 + 1 \geq -2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + 1 + 2\alpha \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha + 1)^2 \geq 0 \text{ το οποίο ισχύει.}$$

$$\beta) |\alpha| + \frac{1}{|\alpha|} \geq 2 \Leftrightarrow |\alpha| + \frac{1}{|\alpha|} \geq 2 \stackrel{|\alpha|>0}{\Leftrightarrow} |\alpha|^2 + 1 \geq 2|\alpha| \Leftrightarrow |\alpha|^2 - 2|\alpha| + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (|\alpha| - 1)^2 \geq 0 \text{ το οποίο ισχύει.}$$

Παρατήρηση: Δεν χρειάζεται το $\alpha < 0$.

$$36898. \alpha) \text{ Αν } \alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}, \text{ να αποδειχθεί ότι: } \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| + \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \geq 2 \quad (1).$$

$\beta)$ Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

$$\alpha) \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| + \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \geq 2 \Leftrightarrow \frac{|\alpha|}{|\beta|} + \frac{|\beta|}{|\alpha|} \geq 2 \stackrel{(\cdot|\alpha||\beta|)}{\Leftrightarrow} |\alpha|^2 + |\beta|^2 \geq 2|\alpha||\beta| \Leftrightarrow$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2|\alpha||\beta| \geq 0 \Leftrightarrow (|\alpha| - |\beta|)^2 \geq 0 \text{ το οποίο ισχύει.}$$

$$\beta) (|\alpha| - |\beta|)^2 = 0 \Leftrightarrow |\alpha| - |\beta| = 0 \Leftrightarrow |\alpha| = |\beta| \Leftrightarrow \alpha = \pm \beta.$$

37200. Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x+1| < 2$, τότε:

$\alpha)$ να δείξετε ότι $x \in (-3, 1)$.

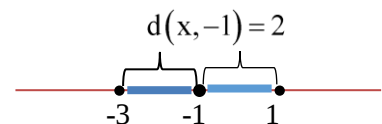
$\beta)$ να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης: $K = \frac{|x+3| + |x-1|}{4}$ είναι αριθμός ανεξάρτητος του x .

Λύση

$$\alpha) |x+1| < 2 \Leftrightarrow -2 < x+1 < 2 \Leftrightarrow -3 < x < 1 \Leftrightarrow x \in (-3, 1)$$

$\beta)$ Αφού $-3 < x < 1$ είναι $x+3 > 0$ και $x-1 < 0$. Τότε $|x+3| = x+3$,

$$|x-1| = 1-x \text{ και } K = \frac{|x+3| + |x-1|}{4} = \frac{x+3+1-x}{4} = 1$$



37201. Δίνεται η παράσταση: $A = |x-1| + |y-3|$, με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) A = x - y + 2.$$

$$\beta) 0 < A < 4.$$

Λύση

$\alpha)$ Αφού $1 < x < 4$ ισχύει ότι $x-1 > 0$ και $|x-1| = x-1$.

Επειδή $2 < y < 3$, ισχύει ότι $y-3 < 0$ και $|y-3| = 3-y$.

$$\text{Άρα } A = x - 1 + 3 - y = x - y + 2.$$

$\beta)$ Είναι $1 < x < 4$ (1) και $2 < y < 3 \Leftrightarrow -2 > -y > -3 \Leftrightarrow -3 < -y < -2 \Leftrightarrow -1 < -y + 2 < 0$ (2)

Με πρόσθεση των (1) και (2) έχουμε: $0 < x - y + 2 < 4 \Leftrightarrow 0 < A < 4$

Θέμα 4ο

13179. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $1 \leq \beta \leq 2$ και $2 \leq \alpha \leq 4$.

α) i. Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών να δείξετε ότι η απόσταση των α και β είναι μικρότερη ή ίση του 3.

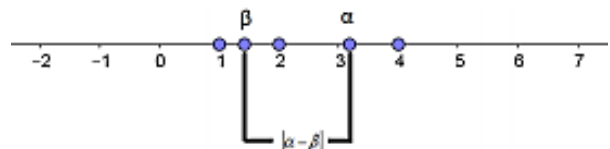
ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντηση στο i. ερώτημα.

β) i. Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} \leq 1 \leq \frac{\alpha}{\beta}$.

ii. Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει $\left|1 - \frac{\beta}{\alpha}\right| = \left|\frac{\alpha}{\beta} - 1\right|$.

Λύση

α) i. Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα η απόσταση των α, β γίνεται μέγιστη όταν το β είναι το 1 και το α το 4, οπότε η μέγιστη απόσταση τους είναι ίση με 3, άρα $d(\alpha, \beta) \leq 3$.



ii. Είναι $2 \leq \alpha \leq 4$ (1) και $1 \leq \beta \leq 2 \Leftrightarrow -1 \geq -\beta \geq -2 \Leftrightarrow -2 \leq -\beta \leq -1$ (2)

Προσθέτοντας τις (1), (2) κατά μέλη προκύπτει: $0 \leq \alpha - \beta \leq 3$

Είναι $d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta| = \alpha - \beta$, άρα $d(\alpha, \beta) \leq 3$.

β) i. Είναι $1 \leq \beta \leq 2$ (3) και $2 \leq \alpha \leq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{1}{\alpha} \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{\alpha} \leq \frac{1}{2}$ (4)

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις (3), (4) προκύπτει ότι $\frac{1}{2} \leq \beta \cdot \frac{1}{\alpha} \leq 1 \Rightarrow \frac{\beta}{\alpha} \leq 1$

Είναι $2 \leq \alpha \leq 4$ (5) και $1 \leq \beta \leq 2 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{\beta} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\beta} \leq 1$ (6)

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις (5), (6) προκύπτει ότι $1 \leq \alpha \cdot \frac{1}{\beta} \leq 4 \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} \geq 1$

ii. Είναι $\frac{\beta}{\alpha} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1 - \frac{\beta}{\alpha}$ και $\frac{\alpha}{\beta} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} - 1 \geq 0$, οπότε

$$\left|1 - \frac{\beta}{\alpha}\right| = \left|\frac{\alpha}{\beta} - 1\right| \Leftrightarrow 1 - \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta} - 1 \stackrel{\alpha\beta}{\Leftrightarrow} \alpha\beta - \cancel{\alpha\beta} \frac{\beta}{\cancel{\alpha}} = \cancel{\alpha\beta} \frac{\alpha}{\cancel{\beta}} - \alpha\beta \Leftrightarrow$$

$$\alpha\beta - \beta^2 = \alpha^2 - \alpha\beta \Leftrightarrow 0 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$

Όμως $1 \leq \beta \leq 2$ και $2 \leq \alpha \leq 4$, οπότε η ισότητα $\alpha = \beta$ ισχύει μόνο όταν $\alpha = \beta = 2$.

33888. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει η ανίσωση:

$$(\alpha - 1)(1 - \beta) > 0.$$

α) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α, β .

β) Αν επιπλέον $|\beta - \alpha| = 4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K = |\alpha - 1| + |1 - \beta|$.

Λύση

α) Επειδή $(\alpha - 1)(1 - \beta) > 0$, οι αριθμοί $\alpha - 1, 1 - \beta$ είναι ομόσημοι.

Αν $\alpha - 1 > 0 \Leftrightarrow \alpha > 1$ και $1 - \beta > 0 \Leftrightarrow \beta < 1$, τότε $\beta < 1 < \alpha$.

Αν $\alpha - 1 < 0 \Leftrightarrow \alpha < 1$ και $1 - \beta < 0 \Leftrightarrow \beta > 1$, τότε $\alpha < 1 < \beta$.

Άρα πάντοτε το 1 είναι μεταξύ των α, β .

β) Αν $\alpha < 1 < \beta$ έχουμε $|\beta - \alpha| = \beta - \alpha = 4$ ($\beta > \alpha$) και $K = 1 - \alpha + \beta - 1 = \beta - \alpha = 4$ ($\alpha - 1 < 0, 1 - \beta < 0$)

Αν $\beta < 1 < \alpha$ έχουμε $|\beta - \alpha| = -\beta + \alpha = 4$ ($\alpha > \beta$) και $K = \alpha - 1 + 1 - \beta = -\beta + \alpha = 4$ ($\alpha - 1 > 0, 1 - \beta > 0$)

33896. Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $|\alpha - 2| < 1$ και $|\beta - 3| \leq 2$.

α) Να αποδειχθεί ότι $1 < \alpha < 3$.

β) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο β .

γ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2\alpha - 3\beta$.

δ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\frac{\alpha}{\beta}$.

Λύση

α) $|\alpha - 2| < 1 \Leftrightarrow -1 < \alpha - 2 < 1 \Leftrightarrow 1 < \alpha < 3$ (1)

β) $|\beta - 3| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq \beta - 3 \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq \beta \leq 5 \Leftrightarrow \beta \in [1, 5]$

γ) Είναι $1 < \alpha < 3 \Leftrightarrow 2 < 2\alpha < 6$ (2) και $1 \leq \beta \leq 5 \Leftrightarrow -3 \geq -3\beta \geq -15 \Leftrightarrow -15 \leq -3\beta \leq -3$ (3).

Με πρόσθεση των (2) και (3) έχουμε $-13 < 2\alpha - 3\beta < 3$.

δ) Είναι $1 < \alpha < 3$ (1) και $1 \leq \beta \leq 5 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{\beta} \geq \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{\beta} \leq 1$ (4)

Με πολλαπλασιασμό των (1) και (4) έχουμε $\frac{1}{5} < \alpha \cdot \frac{1}{\beta} < 3 \Leftrightarrow \frac{1}{5} < \frac{\alpha}{\beta} < 3$

36671. Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x, 5) \leq 9$.

α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά.

β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x .

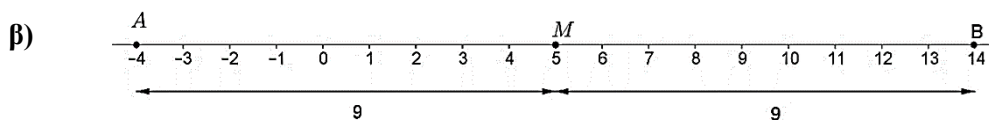
γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β).

δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι:

$$|x + 4| + |x - 14| = 18.$$

Λύση

α) Η απόσταση του πραγματικού αριθμού x από τον αριθμό 5 είναι μικρότερη ή ίση του 9.



Ο ζητούμενος αριθμός είναι οποιοσδήποτε αριθμός είναι σημείο του AB ($[-4, 14]$)

γ) $|x - 5| \leq 9 \Leftrightarrow -9 \leq x - 5 \leq 9 \Leftrightarrow -9 + 5 \leq x \leq 9 + 5 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 14$

δ) Επειδή $-4 \leq x \leq 14$ είναι $x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow |x + 4| = x + 4$ και $x - 14 \leq 0 \Leftrightarrow |x - 14| = -x + 14$

Επομένως $|x + 4| + |x - 14| = x + 4 - x + 14 = 18$

36672. Δίνονται τα σημεία A , B και M που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2, 7 και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων: **i)** $|x + 2|$ **ii)** $|x - 7|$

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος:

$$|x + 2| + |x - 7|.$$

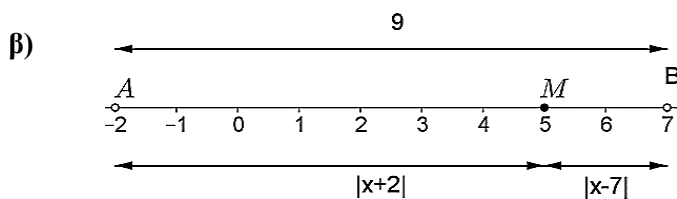
γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = |x + 2| + |x - 7|$ γεωμετρικά.

δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

Λύση

α) i) $|x + 2| = d(x, -2)$ παριστάνει την απόσταση του πραγματικού αριθμού x από το -2.

ii) $|x - 7| = d(x, 7)$ παριστάνει την απόσταση του πραγματικού αριθμού x από το 7.



γ) Παριστάνει το άθροισμα των αποστάσεων του πραγματικού αριθμού x από το -2 και από το 7, δηλαδή αν M, Γ, Δ οι εικόνες των x, -2, 7 στον άξονα των πραγματικών αριθμών τότε

$$(MG) + (MD) = (GD) = |7 - (-2)| = 9$$

δ) Είναι $-2 < x < 7$, επομένως $x + 2 > 0 \Leftrightarrow |x + 2| = x + 2$ και $x - 7 < 0 \Leftrightarrow |x - 7| = -x + 7$. Άρα

$$A = \cancel{x} + 2 - \cancel{x} + 7 = 9$$

36673. Σε έναν άξονα τα σημεία A , B και M αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, 9 και x αντίστοιχα.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x - 5|$ και $|x - 9|$.

β) Αν ισχύει $|x - 5| = |x - 9|$ τότε:

i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου M αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο M. Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

Λύση

α) $|x - 5| = d(x, 5)$ παριστάνει την απόσταση του πραγματικού αριθμού x από το 5 και το

$|x - 9| = d(x, 9)$ παριστάνει την απόσταση του πραγματικού αριθμού x από το 9.

β) i) το M ισαπέχει από τα σημεία A και B όπου A η εικόνα του 5 και B η εικόνα του 9 και βρίσκεται στον άξονα x'x. Άρα είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB δηλαδή ο αριθμός 7.

ii) $|x - 5| = |x - 9| \Leftrightarrow x - 5 = x - 9 \Leftrightarrow 0 \cdot x = -4$ Αδύνατη ή $x - 5 = -(x - 9) \Leftrightarrow x - 5 = -x + 9 \Leftrightarrow 2x = 14 \Leftrightarrow x = 7$

Θέμα 1ο

14801.α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση Σ (Σωστό), αν η πρόταση είναι αληθής ή Λ (Λάθος), αν η πρόταση είναι ψευδής.

i. Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ισχύει η πρόταση:

Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \delta$.

ii. Για κάθε $\theta \in (0, +\infty)$ ισχύει: $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$.

iii. Η εξίσωση $x^3 = 5$ έχει δύο πραγματικές ρίζες.

iv. Αν ισχύουν $\alpha > 0$ και $\Delta < 0$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, τότε το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι αρνητικό για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό x .

v. Ο παρακάτω πίνακας θα μπορούσε να είναι πίνακας τιμών μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, 4]$.

x	0	1	1	2	4
$y = f(x)$	0	1	-1	2	0,5

β) Να αποδείξετε ότι, για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β , ισχύει η ανισότητα:

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

Λύση

α) i. Λ ii. Σ iii. Λ iv. Λ v. Λ

β) Επειδή και τα δύο μέλη της σχέσης $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε:

$$\begin{aligned} |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| &\Leftrightarrow |\alpha + \beta|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 \leq \alpha^2 + 2|\alpha||\beta| + \beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \leq \alpha^2 + 2|\alpha||\beta| + \beta^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\alpha\beta \leq 2|\alpha||\beta| \Leftrightarrow |\alpha\beta| \geq \alpha\beta \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

Η ισότητα $|\alpha\beta| = \alpha\beta$ ισχύει μόνο αν $\alpha\beta \geq 0$, δηλαδή αν και μόνο αν οι αριθμοί α, β είναι ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσος με μηδέν.

14811. α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Το σημείο $M(x, y)$ με $x > 0$ και $y < 0$ βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων.

ii. Αν τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε ισχύει: $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$.

iii. Ισχύει $|a| \geq a$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

iv. Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε: $\alpha - \gamma > \beta - \delta$ για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

v. Η εξίσωση $ax = a$ έχει μοναδική λύση $x = 1$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

β) Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β να αποδείξετε ότι: $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$.

Λύση

α) i. Λ ii. Σ iii. Σ iv. Λ v. Λ

β) Επειδή και τα δύο μέλη της ισότητας $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε:

$$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta| \Leftrightarrow |\alpha \cdot \beta|^2 = (|\alpha| \cdot |\beta|)^2 \Leftrightarrow (\alpha \cdot \beta)^2 = |\alpha|^2 \cdot |\beta|^2 \Leftrightarrow (\alpha \cdot \beta)^2 = \alpha^2 \cdot \beta^2 \text{ που ισχύει.}$$

14932. α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ είναι αδύνατη, όταν $\alpha \neq 0$ και $\beta = 0$.

ii. Αν $\alpha \leq 0$ και n άρτιος φυσικός, τότε $\sqrt[n]{\alpha^n} = \alpha$.

iii. Αν $\alpha > 0$ και $\Delta < 0$ η ανίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma < 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iv. Αν η απόσταση του x από το 0 είναι ίση με 3, τότε $x=3$ ή $x=-3$.

v. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τον άξονα $y'y$.

β) Για οποιονδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β , να αποδείξετε ότι $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.

Λύση

α) i. Λ **ii.** Λ **iii.** Λ **iv.** Σ **v.** Σ

β) Επειδή και τα δύο μέλη της σχέσης $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε:

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \Leftrightarrow |\alpha + \beta|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2 \Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 \leq |\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \leq \alpha^2 + 2|\alpha||\beta| + \beta^2 \Leftrightarrow \cancel{\alpha^2} + 2\alpha\beta \leq \cancel{\alpha^2} + 2|\alpha||\beta| + \cancel{\beta^2} \Leftrightarrow \cancel{\alpha}\beta \leq \cancel{\alpha}|\beta| \Leftrightarrow |\alpha\beta| \geq \alpha\beta \text{ που ισχύει.}$$

Η ισότητα $|\alpha\beta| = \alpha\beta$ ισχύει μόνο αν $\alpha\beta \geq 0$, δηλαδή αν και μόνο αν οι αριθμοί α, β είναι ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσος με μηδέν.

Ρίζες πραγματικών αριθμών

Θέμα 2ο

12943. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ και $\beta = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha + \beta$ και το γινόμενο $\alpha\beta$.

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 = 7$.

Λύση

$$\alpha) \alpha + \beta = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) + \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) = \frac{1}{2}(3 + \cancel{\sqrt{5}} + 3 - \cancel{\sqrt{5}}) = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$$

$$\alpha\beta = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) \cdot \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) = \frac{1}{4}(3^2 - (\sqrt{5})^2) = \frac{1}{4}(9 - 5) = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$$

$$\beta) 1^{\text{ος}} \text{ τρόπος: } \alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{4}(3 + \sqrt{5})^2 + \frac{1}{4}(3 - \sqrt{5})^2 = \frac{1}{4}(9 + 6\sqrt{5} + 5) + \frac{1}{4}(9 - 6\sqrt{5} + 5) =$$

$$\frac{1}{4}(14 + 6\sqrt{5}) + \frac{1}{4}(14 - 6\sqrt{5}) = \frac{1}{4}(14 + \cancel{6\sqrt{5}} + 14 - \cancel{6\sqrt{5}}) = \frac{1}{4} \cdot 28 = 7$$

2^{ος} τρόπος: (Με χρήση του α ερωτήματος)

$$\alpha^2 + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 2\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 3^2 - 2 \cdot 1 = 9 - 2 = 7$$

14452. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \sqrt{3} - 1$ και $\beta = \sqrt{3} + 1$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 10$.

β) Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + 1 = 5$.

Λύση

$$\alpha) \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha\beta = (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta =$$

$$= (\sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} + 1)^2 - (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1) = (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3}^2 - 1^2) =$$

$$= 4\sqrt{3}^2 - (3 - 1) = 4 \cdot 3 - 2 = 12 - 2 = 10$$

$$\beta) \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + 1 = \frac{\beta^2}{\alpha\beta} + \frac{\alpha^2}{\alpha\beta} + \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{10}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{10}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{10}{3 - 1} = \frac{10}{2} = 5$$

14682. Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{3})^6$ και $B = (\sqrt[3]{3})^6$.

α) Να δείξετε ότι: $A - B = 18$.

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς $\sqrt{3}, \sqrt[3]{3}$.

Λύση

$$\alpha) \text{ Είναι } A = (\sqrt{3})^6 = \left[(\sqrt{3})^2 \right]^3 = 3^3 = 27 \text{ και } B = (\sqrt[3]{3})^6 = \left[(\sqrt[3]{3})^3 \right]^2 = 3^2 = 9, \text{ άρα } A - B = 27 - 9 = 18.$$

β) Είναι $A > B \Leftrightarrow (\sqrt{3})^6 > (\sqrt[3]{3})^6 \Leftrightarrow \sqrt{3} > \sqrt[3]{3}$.

14750. Δίνονται οι ετερόσημοι αριθμοί α , β , με $\alpha = 1 + 2\sqrt{2}$ και $\beta = \sqrt{2} - 2$. Να δείξετε ότι:

α) $\alpha^2 + \beta^2 = 15$

β) $\sqrt{\alpha^2} + 2\sqrt{\beta^2} = 5$.

Λύση

α) $\alpha^2 + \beta^2 = (1 + 2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2} - 2)^2 = 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2 + 4 =$
 $1 + 4\sqrt{2} + 8 + 2 - 4\sqrt{2} + 4 = 15$

β) Είναι $\sqrt{\alpha^2} + 2\sqrt{\beta^2} = |\alpha| + 2|\beta|$

Όμως $\alpha = 1 + 2\sqrt{2} > 0$ και $\beta = \sqrt{2} - 2 < 0$ αφού $\sqrt{2} < 2$, οπότε:

$\sqrt{\alpha^2} + 2\sqrt{\beta^2} = |\alpha| + 2|\beta| = \alpha - 2\beta = 1 + 2\sqrt{2} - 2(\sqrt{2} - 2) = 1 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 4 = 5$.

14774.α) Να δείξετε ότι $(2 + \sqrt{5})^2 = 9 + 4\sqrt{5}$ και $(1 - \sqrt{5})^2 = 6 - 2\sqrt{5}$.

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι

$$\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 1 + 2\sqrt{5}.$$

Λύση

α) $(2 + \sqrt{5})^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 4 + 4\sqrt{5} + 5 = 9 + 4\sqrt{5}$

$(1 - \sqrt{5})^2 = 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 1 - 2\sqrt{5} + 5 = 6 - 2\sqrt{5}$

β) $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{(2 + \sqrt{5})^2} + \sqrt{(1 - \sqrt{5})^2} = |2 + \sqrt{5}| + |1 - \sqrt{5}| = 2 + \sqrt{5} - 1 + \sqrt{5} = 1 + 2\sqrt{5}$

14849. α) Να αποδείξετε ότι $2 < \sqrt{5}$.

β) Να αποδείξετε ότι $(2 - \sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2$.

Λύση

α) Πράγματι $2 < \sqrt{5} \Leftrightarrow 2^2 < \sqrt{5}^2 \Leftrightarrow 4 < 5$ ισχύει.

β) $(2 - \sqrt{5})^2 = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 4 - 4\sqrt{5} + 5 = 9 - 4\sqrt{5}$

γ) $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} \stackrel{\beta) \text{ ερώτημα}}{=} \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = |2 - \sqrt{5}| \stackrel{\alpha) \text{ ερώτημα}}{=} \sqrt{5} - 2$

15051.α) Να αποδείξετε ότι $(2 - \sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}$ και να υπολογίσετε το ανάπτυγμα $(2 + \sqrt{5})^2$.

β) Να βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες των αριθμών $9 - 4\sqrt{5}$ και $9 + 4\sqrt{5}$.

Λύση

$$\alpha) (2 - \sqrt{5})^2 = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 4 - 4\sqrt{5} + 5 = 9 - 4\sqrt{5}$$

$$(2 + \sqrt{5})^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 4 + 4\sqrt{5} + 5 = 9 + 4\sqrt{5}$$

$$\beta) \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = |2 - \sqrt{5}| = -2 + \sqrt{5}, \quad \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = \sqrt{(2 + \sqrt{5})^2} = 2 + \sqrt{5}$$

34152. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \sqrt{(x-2)^2}$ και $B = \sqrt[3]{(2-x)^3}$ όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ;

β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ;

γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x \leq 2$, ισχύει $A = B$.

Λύση

α) Είναι $A = |x - 2|$ και ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό x .

β) Πρέπει $(2 - x)^3 \geq 0 \Leftrightarrow 2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$.

γ) Για $x \leq 2$ είναι $A = 2 - x$ και $B = \sqrt[3]{(2-x)^3} = |2-x| = 2-x$. Άρα $A = B$.

34155. Αν είναι $A = \sqrt[3]{5}$, $B = \sqrt{3}$ και $\Gamma = \sqrt[6]{5}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt{15}$.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς A , B .

Λύση

$$\alpha) A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{5} = \sqrt[6]{5^2} \cdot \sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[6]{5} = \sqrt[6]{5^2 \cdot 3^3 \cdot 5} = \sqrt[6]{5^3 \cdot 3^3} = \sqrt[6]{15^2} = \sqrt{15}$$

β) $\sqrt[3]{5} < 3 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{5})^3 < 3^3 \Leftrightarrow 5 < 27$ ισχύει. Άρα $A < B$.

34157. Αν είναι $A = 2 - \sqrt{3}$, $B = 2 + \sqrt{3}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B = 1$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = A^2 + B^2$.

Λύση

$$\alpha) A \cdot B = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 2^2 - \sqrt{3}^2 = 4 - 3 = 1$$

$$\beta) A + B = 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 2 + 2 = 4 \text{ και } \Pi = A^2 + B^2 = (A + B)^2 - 2A \cdot B = 4^2 - 2 \cdot 1 = 16 - 2 = 14$$

36778. Δίνεται η παράσταση: $K = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$.

α) Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το x , ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

β) Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι παράσταση K σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

Λύση

α) Πρέπει $x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$ και $x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$. Άρα για $x \neq -2, 3$ η παράσταση K έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

β) Όταν $-2 < x < 3$, είναι $x + 2 > 0 \Leftrightarrow |x + 2| = x + 2$ και $x - 3 < 0 \Leftrightarrow |x - 3| = -x + 3 = -(x - 3)$

$$K = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3} = \frac{\sqrt{(x + 2)^2}}{x + 2} - \frac{\sqrt{(x - 3)^2}}{x - 3} \Leftrightarrow$$

$$K = \frac{|x + 2|}{x + 2} - \frac{|x - 3|}{x - 3} = \frac{x + 2}{x + 2} - \frac{x - 3}{x - 3} = 1 - 1 = 0$$

37172. Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις: $A = (\sqrt{2})^6$, $B = (\sqrt[3]{3})^6$ και $\Gamma = (\sqrt[6]{6})^6$.

α) Να δείξετε ότι: $A + B + \Gamma = 23$.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$.

Λύση

α) $A + B + \Gamma = (\sqrt{2})^6 + (\sqrt[3]{3})^6 + (\sqrt[6]{6})^6 = 2^3 + 3^2 + 6 = 8 + 9 + 6 = 23$

β) $\sqrt[3]{3} > \sqrt[6]{6} \Leftrightarrow (\sqrt[3]{3})^6 > (\sqrt[6]{6})^6 \Leftrightarrow 3^2 > 6 \Leftrightarrow 9 > 6$ ισχύει

37192. Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις):

$$\sqrt{2} \cong 1,41, \sqrt{3} \cong 1,73, \sqrt{5} \cong 2,24, \sqrt{7} \cong 2,64.$$

α) Να επιλέξετε έναν τρόπο, ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}, \sqrt{40}, \sqrt{80}$.

β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{3 \cdot \sqrt{20} + \sqrt{80}}{\sqrt{45} - \sqrt{5}}$;

Λύση

α) $\sqrt{20} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = 2\sqrt{5} \cong 2 \cdot 2,24 = 4,48$

$\sqrt{40} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 5} = 2\sqrt{2} \sqrt{5} \cong 2 \cdot 1,41 \cdot 2,24 = 6,37$

$\sqrt{80} = \sqrt{4^2 \cdot 5} = 4\sqrt{5} \cong 4 \cdot 2,24 = 8,96$

β) $\frac{3 \cdot \sqrt{20} + \sqrt{80}}{\sqrt{45} - \sqrt{5}} = \frac{3 \cdot 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5}}{\sqrt{3^2 \cdot 5} - \sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5} + 4\sqrt{5}}{3\sqrt{5} - \sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 5$

37193. Δίνεται η παράσταση: $A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})$

- α)** Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

Λύση

α) Πρέπει $x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$ και $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$. Άρα η παράσταση A ορίζεται για $x \geq 4$.

β) $A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1}) = (\sqrt{x-4})^2 - (\sqrt{x+1})^2 = x-4 - (x+1) = \cancel{x} - 4 - \cancel{x} - 1 = -5$

37194.α) Να δείξετε ότι : $3 < \sqrt[3]{30} < 4$.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$, $6 - \sqrt[3]{30}$.

Λύση

α) $3 < \sqrt[3]{30} < 4 \Leftrightarrow 3^3 < (\sqrt[3]{30})^3 < 4^3 \Leftrightarrow 27 < 30 < 64$ ισχύει

β) $\sqrt[3]{30} > 6 - \sqrt[3]{30} \Leftrightarrow 2\sqrt[3]{30} > 6 \Leftrightarrow \sqrt[3]{30} > 3 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{30})^3 > 3^3 \Leftrightarrow 30 > 27$ ισχύει . Άρα $\sqrt[3]{30} > 6 - \sqrt[3]{30}$

37195. Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}$

- α)** Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.
β) Για $x=5$,να αποδείξετε ότι: $A^2 + A - 6 = 0$.

Λύση

α) Πρέπει $x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$ και $6-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 6$. Άρα η παράσταση A ορίζεται για $4 \leq x \leq 6$.

β) Για $x=5$ είναι: $A = \sqrt{5-4} + \sqrt{6-5} = \sqrt{1} + \sqrt{1} = 1+1=2$. Άρα $A^2 + A - 6 = 2^2 + 2 - 6 = 4 + 2 - 6 = 0$.

37196. Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{x^2+4} - \sqrt{x-4}$.

- α)** Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.
β) Για $x=4$,να αποδείξετε ότι: $A^2 - A = 2 \cdot (10 - \sqrt{5})$.

Λύση

α) Πρέπει $x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$ και $x^2+4 \geq 0$ που ισχύει πάντοτε. Άρα η παράσταση A ορίζεται για $x \geq 4$, δηλαδή $x \in [4, +\infty)$.

β) Για $x=4$: $A = \sqrt{4^2+4} - \sqrt{4-4} = \sqrt{20} - 0 = \sqrt{2^2 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$

Άρα $A^2 - A = (2\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5} = 20 - 2\sqrt{5} = 2(10 - \sqrt{5})$

37197. Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{1-x} - \sqrt[4]{x^4}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

β) Για $x = -3$, να αποδείξετε ότι: $A^3 + A^2 + A + 1 = 0$.

Λύση

α) $A = \sqrt{1-x} - \sqrt[4]{x^4} = \sqrt{1-x} - |x|$. Πρέπει $1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$, άρα η A ορίζεται για $x \in (-\infty, 1]$.

β) Για $x = -3$ είναι: $A = \sqrt{1-(-3)} - |-3| = \sqrt{4} - 3 = 2 - 3 = -1$

Άρα $A^3 + A^2 + A + 1 = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$.

37198. Δίνεται η παράσταση: $B = \sqrt[5]{(x-2)^5}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

β) Για $x = 4$, να αποδείξετε ότι: $B^2 + 6B = B^4$.

Λύση

α) Πρέπει $(x-2)^5 \geq 0 \Leftrightarrow x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \Leftrightarrow x \in [2, +\infty)$

β) Για $x = 4$ είναι $B = \sqrt[5]{(4-2)^5} = \sqrt[5]{2^5} = 2$ και $B^2 + 6B = 2^2 + 6 \cdot 2 = 4 + 12 = 16 = 2^4 = B^4$

37199. Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{2})^6$ και $B = (\sqrt[3]{2})^6$

α) Να δείξετε ότι: $A - B = 4$.

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς: $\sqrt{2}$, 1 , $\sqrt[3]{2}$.

Λύση

α) $A - B = (\sqrt{2})^6 - (\sqrt[3]{2})^6 = 2^3 - 2^2 = 8 - 4 = 4$

β) $1 < \sqrt[3]{2} < \sqrt{2} \Leftrightarrow 1^6 < (\sqrt[3]{2})^6 < (\sqrt{2})^6 \Leftrightarrow 1 < 2^2 < 2^3 \Leftrightarrow 1 < 4 < 8$ ισχύει.

Θέμα 4ο

14931. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ και $\beta = 1 - \sqrt{2}$

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 - \beta^2$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B = \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$.

γ) Αν $A = 4\sqrt{2}$ και $B = 2$, να δείξετε ότι $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} > \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$.

Λύση

$$\begin{aligned} \alpha) A &= \alpha^2 - \beta^2 = (1 + \sqrt{2})^2 - (1 - \sqrt{2})^2 = \\ &= 1 + 2\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 - [1 - 2\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2] = 1 + 2\sqrt{2} + 2 - (1 - 2\sqrt{2} + 2) = \\ &= 3 + 2\sqrt{2} - (3 - 2\sqrt{2}) = \cancel{3} + 2\sqrt{2} - \cancel{3} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\beta) B = \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2} = |\alpha| - |\beta| = |1 + \sqrt{2}| - |1 - \sqrt{2}| = 1 + \sqrt{2} - (-1 + \sqrt{2}) = 1 + \cancel{\sqrt{2}} + 1 - \cancel{\sqrt{2}} = 2$$

$$\gamma) \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} > \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2} \Leftrightarrow \sqrt{4\sqrt{2}} > 2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow (\sqrt{4\sqrt{2}})^2 > 2^2 \Leftrightarrow 4\sqrt{2} > 4 \Leftrightarrow \sqrt{2} > 1 \text{ ισχύει.}$$

Θέμα 3ο

14805. Έστω α ένας πραγματικός αριθμός, για τον οποίο ισχύει $\alpha = |3\sqrt{2} - 4| + 2|\sqrt{2} - 2|$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = \sqrt{2}$. (Θεωρήστε ότι $\sqrt{2} = 1,41$)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) να αποδείξετε ότι $\alpha^3 = 2\alpha$.

γ) Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης $A = \alpha^3 + (\alpha - 1)^2$.

Λύση

α) 1^{ος} τρόπος: Με $\sqrt{2} = 1,41$ είναι $3\sqrt{2} = 4,23 > 4$ άρα $\alpha = 3\sqrt{2} - \cancel{4} - 2\sqrt{2} + \cancel{4} = \sqrt{2}$.

2^{ος} τρόπος: (Χωρίς χρήση του $\sqrt{2} = 1,41$)

Έστω $3\sqrt{2} - 4 > 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{2} > 4 \Leftrightarrow 9 \cdot 2 > 16 \Leftrightarrow 18 > 16$ ισχύει άρα $3\sqrt{2} - 4 > 0$ και είναι $2 < 4 \Leftrightarrow \sqrt{2} < 2$.

Άρα τελικά $\alpha = 3\sqrt{2} - \cancel{4} - 2\sqrt{2} + \cancel{4} = \sqrt{2}$.

$$\beta) \alpha^3 = \sqrt{2}^3 = \sqrt{2}^2 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2} = 2\alpha$$

$$\gamma) A = \alpha^3 + (\alpha - 1)^2 = \cancel{2\alpha} + \alpha^2 - \cancel{2\alpha} + 1 = \sqrt{2}^2 + 1 = 2 + 1 = 3$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ**Εξισώσεις 1^{ου} βαθμού****Θέμα 2ο**

14741. Δίνεται η αλγεβρική παράσταση $K = \frac{\alpha(\alpha^2 - 2\alpha + 1)}{\alpha^3 - \alpha^2}$, $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$.

α) Να δείξετε ότι $K = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$.

β) Για κάθε $\alpha \neq 0$ και $\alpha \neq 1$,

i. Να δείξετε ότι $K \neq 0$.

ii. Να βρείτε την τιμή του α για την οποία ισχύει η ισότητα $K(K - 2) = 0$.

Λύση

α) Για $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$ είναι $K = \frac{\alpha(\alpha^2 - 2\alpha + 1)}{\alpha^3 - \alpha^2} = \frac{\cancel{\alpha}(\alpha - 1)^{\cancel{2}}}{\alpha^{\cancel{2}}(\alpha - 1)} = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$.

β) i. Για $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$ είναι $\alpha - 1 \neq 0$, άρα $K \neq 0$.

ii. $K(K - 2) = 0 \Leftrightarrow \left(K = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha - 1}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1 \right)$ ή
 $\left(K - 2 = 0 \Leftrightarrow K = 2 \Leftrightarrow \frac{\alpha - 1}{\alpha} = 2 \Leftrightarrow \alpha - 1 = 2\alpha \Leftrightarrow \alpha - 2\alpha = 1 \Leftrightarrow -\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = -1 \right)$

34146. Δίνεται η εξίσωση: $(\alpha + 3)x = \alpha^2 - 9$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) όταν $\alpha = 1$

ii) όταν $\alpha = -3$

β) Να βρείτε τις τιμές του α , για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή.

Λύση

$$(\alpha + 3)x = \alpha^2 - 9 \quad (1)$$

α) i) Για $\alpha = 1$ στην (1) έχουμε $4x = 1^2 - 9 \Leftrightarrow 4x = -8 \Leftrightarrow x = -\frac{8}{4} \Leftrightarrow x = -2$

ii) Για $\alpha = -3$ από την (1) έχουμε $0 \cdot x = (-3)^2 - 9 \Leftrightarrow 0 \cdot x = -8$ Αδύνατη

β) Έχει μοναδική λύση όταν $\alpha + 3 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq -3$ την $x = \frac{\alpha^2 - 9}{\alpha + 3} = \frac{(\alpha - 3)(\cancel{\alpha + 3})}{\cancel{\alpha + 3}} = \alpha - 3$

34163. Δίνεται η εξίσωση $\lambda \cdot x = x + \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1), \lambda \in \mathbb{R}.$$

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε.

γ) Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

$$\alpha) \lambda \cdot x = x + \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow \lambda \cdot x - x = \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow (\lambda - 1) \cdot x = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

$$\beta) \text{ Πρέπει } \lambda - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1.$$

$$\text{Τότε έχει τη μοναδική λύση } x = \frac{(\cancel{\lambda-1})(\lambda+1)}{\cancel{\lambda-1}} = \lambda + 1$$

$$\gamma) \text{ Πρέπει } \lambda = 1. \text{ Πράγματι για } \lambda = 1 \text{ έχουμε } 0 \cdot x = 0.$$

12857. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 1)x - 2\lambda + 2 = 0$.

α) i. Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda = -2$.

ii. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το $x=1$ είναι ρίζα της εξίσωσης.

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση είναι ταυτότητα

Λύση

$$\alpha) \text{ i. Για } \lambda = -2 \text{ η εξίσωση γίνεται: } (-2-1)x - 2(-2) + 2 = 0 \Leftrightarrow -3x + 4 + 2 = 0 \Leftrightarrow -3x = -6 \Leftrightarrow x = 2$$

ii. Το $x = 1$ είναι ρίζα της εξίσωσης, αν και μόνο αν

$$(\lambda - 1) \cdot 1 - 2\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 - 2\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow -\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

$$\beta) \text{ Είναι } (\lambda - 1)x - 2\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)x = 2\lambda - 2$$

Η εξίσωση είναι ταυτότητα, αν και μόνο αν $(\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1)$ και $(2\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = 1)$.

Άρα για $\lambda = 1$ είναι ταυτότητα.

14224. Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{x^2 - 1}{x^2 - x}$, $x \neq 0, x \neq 1$.

$$\alpha) \text{ Να δείξετε ότι } A = \frac{x+1}{x}.$$

β) i. Να βρείτε για ποια τιμή του x η παράσταση A μηδενίζεται.

ii. Μπορεί η παράσταση A να πάρει την τιμή 2; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

$$\alpha) \text{ Για } x \neq 0, x \neq 1 \text{ είναι } A = \frac{x^2 - 1}{x^2 - x} = \frac{(\cancel{x-1})(x+1)}{x(\cancel{x-1})} = \frac{x+1}{x}$$

$$\beta) \text{ i. } A = 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

ii. $A = 2 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} = 2 \Leftrightarrow x+1 = 2x \Leftrightarrow 1 = 2x - x \Leftrightarrow x = 1$ απορρίπτεται, άρα η παράσταση A δεν μπορεί να πάρει την τιμή 2.

34872. Δίνεται η εξίσωση $kx + 3 = 2x$, με παράμετρο $k \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση για $k = 1$ και για $k = 3$.

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση είναι αδύνατη για $k = 2$.

Λύση

α) Για $k = 1$ είναι $x + 3 = 2x \Leftrightarrow x = 3$ και για $k = 3$ είναι $3x + 3 = 2x \Leftrightarrow x = -3$ αδύνατη.

β) Για $k = 2$ είναι $2x + 3 = 2x \Leftrightarrow 0x = 3$ αδύνατη.

36896. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 1)x = \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

α) Επιλέγοντας τρεις διαφορετικές τιμές για το λ , να γράψετε τρεις εξισώσεις.

β) i. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μια και μοναδική λύση.

ii. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της εξίσωσης (1) να ισούται με 4.

Λύση

α) Για $\lambda = 1$: $(1) \Leftrightarrow 0x = 0$, για $\lambda = 2$: $(1) \Leftrightarrow x = 3$ και

για $\lambda = 0$: $(1) \Leftrightarrow -x = -1$

β) i. Η (1) έχει μοναδική λύση αν και μόνον αν $\lambda - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$

ii. Για $\lambda \neq 1$ είναι $(1) \Leftrightarrow x = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda - 1} = \frac{(\cancel{\lambda - 1})(\lambda + 1)}{\cancel{\lambda - 1}} = \lambda + 1$ άρα $\lambda + 1 = 4 \Leftrightarrow \lambda = 3$.

Θέμα 4ο

13170. Υποθέτουμε ότι κάθε κεφάλαιο που κατατίθεται σε έναν λογαριασμό μιας τράπεζας, αυξάνεται στο τέλος κάθε έτους κατά ε % (το επίσημο επιτόκιο αύξησης που δίνει δηλαδή η τράπεζα είναι ε %).

α) Αποδείξτε ότι αν καταθέσουμε στη συγκεκριμένη τράπεζα κεφάλαιο x € με επιτόκιο ε %, ύστερα από δύο έτη θα εισπράξουμε κεφάλαιο $x \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^2$ €.

β) Ένα κεφάλαιο 15.000 € το χωρίζουμε σε δύο ποσά. Το ένα από τα δύο, κατατέθηκε σε μια τράπεζα Α με επιτόκιο 2% και το άλλο, κατατέθηκε σε μια άλλη τράπεζα Β με επιτόκιο 3%. Ύστερα από 2 χρόνια, εισπράχθηκε, με βάση το α) ερώτημα, και από τις δύο τράπεζες συνολικό κεφάλαιο 15.811 €. Ονομάζουμε y το ποσό που κατατέθηκε στην τράπεζα Β.

i) Να αποδείξετε ότι το ποσό y είναι λύση της εξίσωσης:

$$(1,03^2 - 1,02^2) \cdot y = 15811 - 15000 \cdot 1,02^2.$$

ii) Να βρείτε το κεφάλαιο που κατατέθηκε σε κάθε τράπεζα.

Λύση

α) Αν καταθέσουμε x ευρώ με επιτόκιο ε % τότε στο τέλος του

1^{ου} έτους το κεφάλαιο στην τράπεζα θα είναι $x + \frac{\varepsilon}{100}x = x \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)$. Στο τέλος του 2^{ου} έτους το κεφάλαιο

θα είναι $x \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right) + \frac{\varepsilon}{100}x \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right) = x \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right) \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right) = x \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^2$

β) i) Αν y είναι το ποσό που κατατέθηκε στην τράπεζα Β τότε στην τράπεζα Α κατατέθηκε ποσό $15.000 - y$. Σύμφωνα με το α) ερώτημα το ποσό που θα εισπράξει από την τράπεζα Β είναι

$y \left(1 + \frac{3}{100}\right)^2 = y(1 + 0,03)^2 = y \cdot 1,03^2$ και το αντίστοιχο ποσό στην τράπεζα Α είναι

$$(15.000 - y) \left(1 + \frac{2}{100}\right)^2 = (15.000 - y)(1 + 0,02)^2 = (15.000 - y) \cdot 1,02^2$$

Άρα θα πρέπει να ισχύει $y \cdot 1,03^2 + (15.000 - y) \cdot 1,02^2 = 15.811 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y \cdot 1,03^2 + 15.000 \cdot 1,02^2 - y \cdot 1,02^2 = 15.811 \Leftrightarrow (1,03^2 - 1,02^2) \cdot y = 15811 - 15000 \cdot 1,02^2$$

ii) Είναι $(1,03^2 - 1,02^2) \cdot y = 15811 - 15000 \cdot 1,02^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (1,03 - 1,02)(1,03 + 1,02) \cdot y = 15811 - 15000 \cdot 1,0404 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,01 \cdot 2,05 \cdot y = 15811 - 15606 \Leftrightarrow 0,01 \cdot 2,05 \cdot y = 205 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,01 \cdot \frac{205}{100} \cdot y = 205 \Leftrightarrow y = \frac{100}{0,01} \Leftrightarrow y = \frac{100}{\frac{1}{100}} \Leftrightarrow y = 10.000$$

14543. Κάθε περιττός ακέραιος αριθμός a γράφεται στη μορφή $a = 2k + 1$, k ακέραιος.

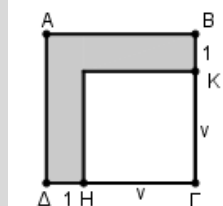
α) Να γράψετε τους αριθμούς 3, 5, 7 ως διαφορά τετραγώνων δύο ακεραίων.

β) i) Να αποδείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών ακεραίων ισούται πάντα με έναν περιττό ακέραιο.

ii) Να γράψετε τον αριθμό 2021 ως διαφορά δύο τετραγώνων ακεραίων αριθμών.

γ) Στο σχήμα τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΓΗΡΚ είναι τετράγωνα με

(ΓΗ)=(ΓΚ)= v και (ΒΚ)=(ΔΗ)=1. Αν γνωρίζουμε ότι το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν είναι ίσο με το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς 45, να βρεθεί η τιμή του θετικού ακεραίου v .



Λύση

α) Είναι $3 = 4 - 1 = 2^2 - 1^2$, $5 = 9 - 4 = 3^2 - 2^2$ και $7 = 16 - 9 = 4^2 - 3^2$

β) i) Έστω k ακέραιος τότε ο $k+1$ είναι ο επόμενος ακέραιος.

Είναι $(k+1)^2 - k^2 = k^2 + 2k + 1 - k^2 = 2k + 1$ που είναι περιττός.

ii) $2021 = 2020 + 1 = 2 \cdot 1010 + 1$ άρα από το προηγούμενο ερώτημα για $k = 1010$ είναι $(1010+1)^2 - 1010^2 = 2021 \Leftrightarrow 1011^2 - 1010^2 = 2021$

γ) Το $AB\Gamma\Delta$ είναι πλευράς $v+1$ άρα έχει εμβαδόν $E_{AB\Gamma\Delta} = (v+1)^2$.

Το $PK\Gamma H$ είναι πλευράς v άρα έχει εμβαδόν $E_{PK\Gamma H} = v^2$. Για το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου ισχύει $E = 45^2$ και επίσης είναι $E_{AB\Gamma\Delta} - E_{PK\Gamma H} = E \Leftrightarrow (v+1)^2 - v^2 = 45^2$ και σύμφωνα με το β) ερώτημα είναι $2v + 1 = 45^2 \Leftrightarrow 2v + 1 = 2025 \Leftrightarrow 2v = 2024 \Leftrightarrow v = 1012$

Εξισώσεις με απόλυτα**2ο Θέμα**

13169. Αν γνωρίζουμε ότι ο x είναι πραγματικός αριθμός με $3 \leq x \leq 5$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $x - 5 \leq 0 < x - 2$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| - |x - 5| = 2$.

Λύση

α) Είναι $x \leq 5 \Leftrightarrow x - 5 \leq 0$ και $x \geq 3 \Leftrightarrow x - 2 \geq 1 > 0$.

β) Επειδή $x - 5 \leq 0 < x - 2$, η εξίσωση γίνεται: $x - 2 - (-x + 5) = 2 \Leftrightarrow x - 2 + x - 5 = 2 \Leftrightarrow 2x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}$

Επειδή $x = \frac{9}{2} = 4,5$ και $3 \leq 4,5 \leq 5$, η λύση είναι δεκτή.

14649. Δίνεται η παράσταση $K = |x + 1| + 2$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $K = \begin{cases} x + 3, & \text{αν } x \geq -1 \\ 1 - x, & \text{αν } x < -1 \end{cases}$.

β) i. Να λυθεί η εξίσωση $|x - 2| = 4$.

ii. Να βρείτε την τιμή της παράστασης K αν ο αριθμός x είναι λύση της παραπάνω εξίσωσης.

Λύση

α) Αν $x \geq -1 \Leftrightarrow x + 1 \geq 0$, είναι $K = x + 1 + 2 = x + 3$, ενώ αν $x < -1$, τότε $x + 1 < 0$ και $K = -x - 1 + 2 = 1 - x$

β) i. $|x - 2| = 4 \Leftrightarrow (x - 2 = 4 \Leftrightarrow x = 6) \text{ ή } (x - 2 = -4 \Leftrightarrow x = -2)$.

ii. Αν $x = 6$ τότε $K = 6 + 3 = 9$ και αν $x = -2$ τότε $K = 1 - (-2) = 3$.

14730. Δίνεται η παράσταση $A = |x - 2| + 3, x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε

i. Την τιμή της παράστασης A για $x = 2^3 - 3^2$.

ii. Τις τιμές του x , ώστε να ισχύει $A = 5$.

β) Να εξετάσετε αν μπορεί η παράσταση A να πάρει την τιμή 2. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) i. $x = 2^3 - 3^2 = 8 - 9 = -1$, τότε $A = |-1 - 2| + 3 = |-3| + 3 = 3 + 3 = 6$.

ii. $A = 5 \Leftrightarrow |x - 2| + 3 = 5 \Leftrightarrow |x - 2| = 2 \Leftrightarrow x - 2 = \pm 2 \Leftrightarrow$
 $(x - 2 = 2 \Leftrightarrow x = 4) \text{ ή } (x - 2 = -2 \Leftrightarrow x = 0).$

β) $A = 2 \Leftrightarrow |x - 2| + 3 = 2 \Leftrightarrow |x - 2| = -1$ αδύνατη, άρα η παράσταση A δεν παίρνει την τιμή 2.

35033. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = |2x - 4|$ και $B = |x - 3|$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Για κάθε $2 \leq x < 3$ να αποδείξετε ότι $A + B = x - 1$.

β) Υπάρχει $x \in [2, 3)$ ώστε να ισχύει $A + B = 2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) Έστω $2 \leq x < 3$, τότε $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow 2(x - 2) \geq 0 \Leftrightarrow 2x - 4 \geq 0$ και $|2x - 4| = 2x - 4$
Επίσης $x - 3 < 0 \Rightarrow |x - 3| = -x + 3$. Επομένως $A + B = 2x - 4 - x + 3 = x - 1$

β) Αν υπάρχει θα πρέπει $2 = x - 1 \Leftrightarrow x = 3 \notin [2, 3)$, άρα δεν υπάρχει.

Η εξίσωση $x^n = a$

Θέμα 3ο

14052. α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 1 = 0$.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|x| + x = 0$.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|x| + |x^2 - 1| + x = 0$.

Λύση

α) $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x = \pm 1$

β) $|x| + x = 0 \Leftrightarrow |x| = -x \Leftrightarrow x \leq 0$

γ) Είναι $|x^2 - 1| \geq 0$ και $|x| \geq -x \Leftrightarrow |x| + x \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα $|x| + |x^2 - 1| + x = 0 \Leftrightarrow |x^2 - 1| + (|x| + x) = 0 \Leftrightarrow$

$(x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1)$ και $(|x| + x = 0 \Leftrightarrow x \leq 0) \Leftrightarrow x = -1$

Εξισώσεις 2^{ου} βαθμού

Θέμα 2ο

13028. Δίνεται η εξίσωση $αx^2 - 2αx - 2α - 2 = 0$ με $α ∈ ℝ^*$ (1).

α) Να βρείτε τις τιμές του $α ∈ ℝ^*$ για τις οποίες η εξίσωση (1) έχει ρίζα το 3.

β) Για $α=2$ να λύσετε την εξίσωση (1).

Λύση

α) Η (1) έχει ρίζα το 3, αν και μόνο αν $α \cdot 3^2 - 2α \cdot 3 - 2α - 2 = 0 \Leftrightarrow 9α - 6α - 2α - 2 = 0 \Leftrightarrow α = 2$.

β) Για $α=2$ η εξίσωση γίνεται $2x^2 - 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

Είναι 2^{ου} βαθμού με διακρίνουσα $Δ = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$ και ρίζες

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{16}}{2} = 3, \quad x_2 = \frac{2 - \sqrt{16}}{2} = -1.$$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι $x = 3$ ή $x = -1$.

34161. α) Να λύσετε την εξίσωση $|2x - 1| = 3$.

β) Αν $α, β$ με $α < β$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση $αx^2 + βx + 3 = 0$.

Λύση

35100. α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $-2x^2 + 10x = 12$.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{-2x^2 + 10x - 12}{x - 2} = 0$.

Λύση

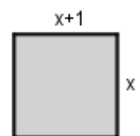
α) $|2x - 1| = 3 \Leftrightarrow 2x - 1 = 3 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ή $2x - 1 = -3 \Leftrightarrow 2x = -2 \Leftrightarrow x = -1$

β) Είναι $α = -1$ και $β = 2$ οπότε η εξίσωση γίνεται: $-x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 3$.

37178. Το πάτωμα του εργαστηρίου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις $(x + 1)$ μέτρα και x μέτρα.

α) Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος.

β) Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90 τετραγωνικά μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του.



Λύση

α) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι: $Π = x + x + (x + 1) + (x + 1) = 4x + 2$ m. Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι: $E = x(x + 1) = x^2 + x$ m².

β) $E = 90 \Leftrightarrow x^2 + x = 90 \Leftrightarrow x^2 + x - 90 = 0$. Η τελευταία είναι εξίσωση

2ου βαθμού με διακρίνουσα: $Δ = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-90) = 361$ και ρίζες

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{361}}{2} = \frac{-1 \pm 19}{2} \Leftrightarrow x_1 = 9 \text{ και } x_2 = -10$ απορρίπτεται αφού $x > 0$, οι διαστάσεις του εργαστηρίου είναι 9 m και 10 m.

37181. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x + 6 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1, να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Για $\lambda = 2$ να λύσετε την εξίσωση (1).

Λύση

α) Το 1 επαληθεύει την εξίσωση. Άρα $1^2 - (\lambda - 1) \cdot 1 + 6 = 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda + 1 + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 8$

β) Για $\lambda = 2$ η εξίσωση γίνεται $x^2 - x + 6 = 0$.

Επειδή $\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1 - 24 = -23 < 0$, δεν έχει πραγματικές λύσεις.

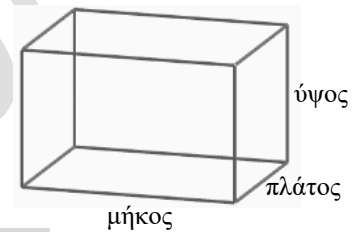
Θέμα 4ο

12683. Η δεξαμενή του παρακάτω σχήματος έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου με βάση τετράγωνο και ύψος ίσο με το ένα τέταρτο του μήκους της.

α) Αν η δεξαμενή έχει όγκο 16m^3 , να βρείτε τις διαστάσεις της.

β) Λόγω έλλειψης χώρου η δεξαμενή ανακατασκευάζεται με βάση ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ύψος 2 μέτρα. Αν το πλάτος της νέας δεξαμενής είναι κατά 2m μικρότερο από το μήκος της υπολογίστε τις διαστάσεις της βάσης προκειμένου ο όγκος να παραμείνει 16m^3 .

γ) Αν η νέα δεξαμενή περιέχει 10m^3 πετρέλαιο να βρείτε το ύψος της στάθμης του πετρελαίου μέσα στη δεξαμενή.



Λύση

α) Έστω x m το μήκος της δεξαμενής. Επειδή η βάση της είναι τετράγωνο τότε και το πλάτος θα είναι x m. Επειδή το ύψος της είναι ίσο με το ένα τέταρτο του μήκους της, το ύψος είναι $\frac{x}{4}$ m. Γνωρίζουμε ότι ο όγκος της δεξαμενής ισούται με το γινόμενο των τριών διαστάσεων της, οπότε ο όγκος της είναι

$$V = x \cdot x \cdot \frac{x}{4} = \frac{x^3}{4} \text{m}^3. \text{ Επειδή η δεξαμενή έχει όγκο } 16\text{m}^3, \text{ ισχύει ότι}$$

$$\frac{x^3}{4} = 16 \Leftrightarrow x^3 = 64 \Leftrightarrow x^3 = 4^3 \Leftrightarrow x = 4\text{m}.$$

Οπότε η δεξαμενή έχει μήκος και πλάτος ίσα με 4m και ύψος ίσο με 1 m.

β) Έστω x m το μήκος της δεξαμενής τότε το πλάτος της θα είναι $(x - 2)$ m και ο όγκος της θα είναι

$$V = x \cdot (x - 2) \cdot 2 = (2x^2 - 4x) \text{m}^3.$$

$$\text{Είναι } 2x^2 - 4x = 16 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 8 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

Η εξίσωση είναι 2^{ου} βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 36$ και ρίζες $x_1 = \frac{2 + \sqrt{36}}{2} = 4$,

$$x_2 = \frac{2 - \sqrt{36}}{2} = -2 \text{ που απορρίπτεται αφού } x > 0.$$

Άρα το μήκος της δεξαμενής είναι 4 m και το πλάτος 2m.

γ) Αφού η νέα δεξαμενή περιέχει 10m^3 πετρέλαιο και η βάση της έχει, μήκος 4m και πλάτος 2m , αν x είναι το ύψος του πετρελαίου μέσα στη δεξαμενή ο όγκος του πετρελαίου θα είναι: $V = 4 \cdot 2 \cdot x = 8x \text{ m}^3$.

Είναι $8x = 10 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}\text{m}$. Άρα το ύψος του υγρού στη δεξαμενή είναι $\frac{5}{4}\text{m}$.

14651. Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)x + 16 = 0, \text{ με } \lambda > 0.$$

α) Να βρείτε:

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ .

ii) το εμβαδόν E του ορθογωνίου.

β) Να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 16$, για κάθε $\lambda > 0$.

γ) Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

Λύση

α) Από Vieta έχουμε: $S = x_1 + x_2 = 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right), P = x_1 \cdot x_2 = 16$

i) $\Pi = 2x_1 + 2x_2 = 2 \cdot 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) = 8\lambda + \frac{8}{\lambda}$

ii) $E = x_1 \cdot x_2 = 16$

β) $\Pi \geq 16 \Leftrightarrow 8\lambda + \frac{8}{\lambda} \geq 16 \stackrel{(\cdot \lambda > 0)}{\Leftrightarrow} 8\lambda^2 + 8 \geq 16\lambda \Leftrightarrow 8\lambda^2 - 16\lambda + 8 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\stackrel{(:8)}{\Leftrightarrow} \lambda^2 - 2\lambda + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 \geq 0 \text{ ισχύει}$

γ) $\Pi = 16 \Leftrightarrow 8\lambda + \frac{8}{\lambda} = 16 \stackrel{(\cdot \lambda \neq 0)}{\Leftrightarrow} 8\lambda^2 + 8 = 16\lambda \Leftrightarrow 8\lambda^2 - 16\lambda + 8 = 0 \Leftrightarrow$

$\stackrel{(:8)}{\Leftrightarrow} \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1.$

Για $\lambda = 1$ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη. Τότε προκύπτει η εξίσωση:

$x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4.$ Άρα $x_1 = x_2 = 4$.

14406. Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha \neq \beta$ για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{\alpha^2 + 1}{\beta^2 + 1} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = \frac{\alpha^{22}(\beta^3)^8}{\alpha^{-2}(\alpha\beta)^{25}}.$

γ) Αν επιπλέον οι μη μηδενικοί αριθμοί α και β εκφράζουν τα μήκη των πλευρών ορθογωνίου παραλληλογράμμου με άθροισμα $\frac{5}{2}$ να τους υπολογίσετε.

δ) Να βρείτε τον αριθμό που πρέπει να προσθέσετε στο α ή στο β , έτσι ώστε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο να γίνει τετράγωνο.

Λύση

$$\alpha) \frac{\alpha^2 + 1}{\beta^2 + 1} = \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow (\alpha^2 + 1)\beta = \alpha(\beta^2 + 1) \Leftrightarrow \alpha^2\beta + \beta = \alpha\beta^2 + \alpha \Leftrightarrow \alpha^2\beta - \alpha\beta^2 + \beta - \alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$\alpha\beta(\alpha - \beta) - (\alpha - \beta) = 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)(\alpha\beta - 1) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$ απορρίπτεται ή $\alpha\beta - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta = 1$, δηλαδή οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

$$\beta) K = \frac{\alpha^{22}(\beta^3)^8}{\alpha^{-2}(\alpha\beta)^{25}} = \frac{\alpha^{22}\beta^{24}}{\alpha^{-2}1^{25}} = \alpha^{22-(-2)}\beta^{24} = \alpha^{24}\beta^{24} = (\alpha\beta)^{24} = 1^{24} = 1$$

$\gamma)$ Επειδή τα α, β είναι μήκη των πλευρών ορθογωνίου παραλληλογράμμου με άθροισμα $\frac{5}{2}$, ισχύει ότι

$$\alpha > 0, \beta > 0 \text{ και } \alpha + \beta = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \beta = \frac{5}{2} - \alpha \quad (1). \text{ Όμως } \alpha\beta = 1 \Leftrightarrow \alpha\left(\frac{5}{2} - \alpha\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5\alpha}{2} - \alpha^2 = 1 \Leftrightarrow 5\alpha - 2\alpha^2 = 2 \Leftrightarrow 0 = 2\alpha^2 - 5\alpha + 2$$

Η τελευταία είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 9$ και ρίζες $\alpha = 2$ ή $\alpha = \frac{1}{2}$. Αν $\alpha = 2$, τότε από την (1)

$$\text{είναι } \beta = \frac{5}{2} - 2 = \frac{5}{2} - \frac{4}{2} = \frac{1}{2} \text{ και αν } \alpha = \frac{1}{2} \text{ τότε } \beta = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2$$

$$\delta) \text{ Αν } \alpha = 2 \text{ και } \beta = \frac{1}{2}, \text{ τότε } \beta + \gamma = \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \gamma = 2 \Leftrightarrow \gamma = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ και}$$

$$\text{αν } \alpha = \frac{1}{2} \text{ και } \beta = 2 \text{ τότε } \alpha + \gamma = \beta \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \gamma = 2 \Leftrightarrow \gamma = \frac{3}{2}$$

33889. α) Να λύσετε τις εξισώσεις: $3x^2 - 14x + 8 = 0$ (1) και $8x^2 - 14x + 3 = 0$ (2).

β) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (3) και $\gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$ (4), με $\alpha \cdot \gamma \neq 0$. Αποδείξτε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι: Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha \cdot \gamma \neq 0$, τότε:

i) $\rho \neq 0$ **ii)** ο $\frac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση (4)

Λύση

α) Η εξίσωση $3x^2 - 14x + 8 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-14)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8 = 196 - 96 = 100$ και οι ρίζες της

$$\text{είναι: } x_1 = \frac{14+10}{2 \cdot 3} = \frac{24}{6} = 4 \text{ και } x_2 = \frac{14-10}{2 \cdot 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Η εξίσωση $8x^2 - 14x + 3 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-14)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8 = 196 - 96 = 100$ και οι ρίζες της

$$\text{είναι: } x_1 = \frac{14+10}{2 \cdot 8} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2} \text{ και } x_2 = \frac{14-10}{2 \cdot 8} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

β) i) Αν $\rho = 0$, τότε αφού είναι ρίζα της εξίσωσης (3) την επαληθεύει.

Επομένως $\alpha \cdot 0^2 + \beta \cdot 0 + \gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = 0$ άτοπο αφού $\alpha \cdot \gamma \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ και $\gamma \neq 0$. Άρα $\rho \neq 0$.

ii) Για να την επαληθεύει θα πρέπει

$$\gamma \left(\frac{1}{\rho} \right)^2 + \beta \cdot \frac{1}{\rho} + \alpha = 0 \Leftrightarrow \gamma \cdot \frac{1}{\rho^2} + \beta \cdot \frac{1}{\rho} + \alpha = 0 \stackrel{(\rho^2)}{\Leftrightarrow} \gamma + \beta \cdot \rho + \alpha \rho^2 = 0 \text{ το οποίο ισχύει αφού ο } \rho \text{ είναι ρίζα της εξίσωσης (3).}$$

34322. Μία υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε, όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x , να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda = (2x + 5)^2 - 8x \quad (1)$$

α) Αν ο εισαγόμενος αριθμός είναι το -5 , ποιος είναι ο εξαγόμενος;

β) Αν ο εξαγόμενος αριθμός είναι το 20 , ποιος μπορεί να είναι ο εισαγόμενος;

γ) i. Να δείξετε ότι η σχέση (1) μπορεί ισοδύναμα να γραφεί στη μορφή:

$$4x^2 + 12x + (25 - \lambda) = 0$$

ii. Να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός x , ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5 .

iii. να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του εξαγόμενου αριθμού λ .

Λύση

$$\alpha) \lambda = [2(-5) + 5]^2 - 8(-5) = (-5)^2 + 40 = 25 + 40 = 65$$

$$\beta) \lambda = 20 \Leftrightarrow (2x + 5)^2 - 8x = 20 \Leftrightarrow 4x^2 + 20x + 25 - 8x = 20 \Leftrightarrow 4x^2 + 12x + 5 = 0$$

$$\Delta = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = 144 - 80 = 64 \quad \text{άρα } x = \frac{-12 \pm 8}{8} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} \text{ ή } x = \frac{-12 - 8}{8} = -\frac{20}{8} = -\frac{5}{2}$$

$$\gamma) i. \lambda = (2x + 5)^2 - 8x \Leftrightarrow \lambda = 4x^2 + 20x + 25 - 8x \Leftrightarrow 4x^2 + 12x + 25 - \lambda = 0 \quad (2)$$

ii. Για $\lambda = 5$ η (2) γίνεται: $4x^2 + 12x + 20 = 0 \stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} x^2 + 3x + 5 = 0$ με $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 9 - 20 = -11 < 0$. Άρα δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός x για να είναι ο εξαγόμενος αριθμός λ είναι ίσος με 5 .

iii. Για να έχει πραγματικές ρίζες η (2) πρέπει

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot (25 - \lambda) \geq 0 \Leftrightarrow 144 - 400 + 16\lambda \geq 0 \Leftrightarrow 16\lambda \geq 256 \Leftrightarrow \lambda \geq 16$$

34327.α) Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - 3x - 4 = 0$ (1) .

β) Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει: $\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0$.

i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1).

ii) Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β .

Λύση

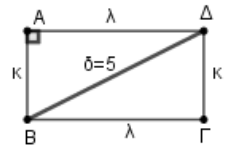
$$\alpha) \Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25 \quad \text{άρα } x_1 = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4, \quad x_2 = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

β) i) Για να είναι αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1) θα πρέπει να

$$\text{την επαληθεύει, δηλαδή } \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 - 3 \frac{\alpha}{\beta} - 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{\beta^2} - 3 \frac{\alpha}{\beta} - 4 = 0 \stackrel{(\beta^2)}{\Leftrightarrow} \alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0 \text{ ισχύει.}$$

- ii) Αφού αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1) θα πρέπει $\frac{\alpha}{\beta} = -1$ απορρίπτεται γιατί οι α, β είναι ομόσημοι ή $\frac{\alpha}{\beta} = 4 \Leftrightarrow \alpha = 4\beta$. Άρα ο α είναι τετραπλάσιος του β .

34390. Δίνεται ορθογώνιο με διαστάσεις κ και λ του οποίου η περίμετρος είναι $\Pi = 14 \text{ cm}$ και μια διαγώνιος $\delta = 5 \text{ cm}$.



α) i. Με χρήση της ταυτότητας $(\kappa + \lambda)^2 = \kappa^2 + 2\kappa\lambda + \lambda^2$, να δείξετε ότι για το εμβαδόν E του ορθογωνίου ισχύει $E = 12 \text{ cm}^2$.

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί οι τις διαστάσεις κ και λ του ορθογωνίου είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 7x + 12 = 0$.

iii. Να βρείτε τις διαστάσεις κ και λ του ορθογωνίου.

β) Να δείξετε ότι ένα ορθογώνιο με περίμετρο $\Pi = 14 \text{ cm}$ πρέπει να έχει εμβαδόν $E \leq \frac{49}{4}$.

Λύση

α) i) Η περίμετρος είναι $\Pi = 2\kappa + 2\lambda \Leftrightarrow 14 = 2(\kappa + \lambda) \Leftrightarrow \kappa + \lambda = 7$ και το εμβαδόν είναι $E = \kappa\lambda$. Από το πυθαγόρειο θεώρημα είναι $\kappa^2 + \lambda^2 = \delta^2 \Leftrightarrow \kappa^2 + \lambda^2 = 25$. Άρα $(\kappa + \lambda)^2 = \kappa^2 + 2\kappa\lambda + \lambda^2 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} \kappa + \lambda &= 7 \\ \Leftrightarrow 49 &= 25 + 2\kappa\lambda \Leftrightarrow 2\kappa\lambda = 24 \Leftrightarrow \kappa\lambda = 12 \Leftrightarrow E = 12 \end{aligned}$$

ii) Η εξίσωση $x^2 - 7x + 12 = 0$ έχει ρίζες τους αριθμούς με άθροισμα $S = -\frac{-7}{1} = 7$ και γινόμενο

$$P = \frac{12}{1} = 12 \text{ άρα είναι οι αριθμοί } \kappa \text{ και } \lambda.$$

iii) Η εξίσωση $x^2 - 7x + 12 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 1$ και ρίζες $x_{1,2} = \frac{7 \pm 1}{2} = \begin{cases} 4 \\ 3 \end{cases}$ άρα οι διαστάσεις είναι 3cm και 4cm.

β) Είναι $x^2 - 7x + E = 0$ και για να έχει ρίζες πρέπει $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 49 - 4E \geq 0 \Leftrightarrow E \leq \frac{49}{4}$.

34544. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$ (1) με άγνωστο το x και παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι $\Delta = (2\lambda - 4)^2$.

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης (1) για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ .

γ) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή της παραμέτρου λ ο αριθμός $x = 2$ είναι λύση της εξίσωσης (1).

Λύση

α) Η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα $\Delta = (-2\lambda)^2 - 16(\lambda - 1) = 4\lambda^2 - 16\lambda + 16 = (2\lambda - 4)^2$.

β) Είναι $\Delta = (2\lambda - 4)^2 \geq 0$.

Αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow (2\lambda - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ τότε η (1) έχει μία διπλή ρίζα ενώ αν

$\Delta > 0 \Leftrightarrow (2\lambda - 4)^2 > 0 \Leftrightarrow 2\lambda - 4 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 2$ τότε η (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

γ) Στην (1) για $x = 2$ είναι $4 - 4\lambda + 4(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow 4 - 4\lambda + 4\lambda - 4 = 0$ ισχύει άρα η $x = 2$ είναι ρίζα της εξίσωσης (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

36651. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης όταν $\lambda = -2$ και όταν $\lambda = 3$.

β) i. Να αποδείξετε ότι αν $\lambda = 5$, τότε η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα.

ii. Να εξετάσετε αν υπάρχει άλλη τιμή του λ , ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα.

γ) Αν ισχύει $|\lambda^2 - 4\lambda - 5| = 4\lambda - \lambda^2 + 5$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 5\}$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Λύση

α) Η $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-2\lambda)^2 - 4(4\lambda + 5) = 4\lambda^2 - 16\lambda - 20 = 4(\lambda^2 - 4\lambda - 5)$.

Για $\lambda = -2$: $\Delta = 4(4 + 8 - 5) = 28 > 0$ και η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. Για

$\lambda = 3$: $\Delta = 4(9 - 12 - 5) = -32 < 0$ και η εξίσωση είναι αδύνατη.

β) i. Για $\lambda = 5$: $\Delta = 4(25 - 20 - 5) = 0$ και η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα.

ii. Έχει διπλή ρίζα αν και μόνον αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow 4(\lambda^2 - 4\lambda - 5) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$ (2).

Η εξίσωση (2) έχει διακρίνουσα $\Delta = 36$ και ρίζες $\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{10}{2} = 5 \\ \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$ άρα η $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0$

έχει διπλή ρίζα και για $\lambda = -1$.

γ) $|\lambda^2 - 4\lambda - 5| = 4\lambda - \lambda^2 + 5 \Leftrightarrow |\lambda^2 - 4\lambda - 5| = -(\lambda^2 - 4\lambda - 5)$ με $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 5\}$ οπότε είναι

$\lambda^2 - 4\lambda - 5 < 0 \Leftrightarrow \Delta < 0$ άρα δεν έχει ρίζες.

36661. Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - \lambda) \cdot x^2 - (\lambda^2 - 1) \cdot x + \lambda - 1 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση 2ου βαθμού.

β) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) παίρνει τη μορφή: $\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

δ) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι 2ου βαθμού.

Λύση

α) Για να είναι εξίσωση 2ου βαθμού θα πρέπει $\lambda^2 - \lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$ και $\lambda - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$

β) $(\lambda^2 - \lambda) \cdot x^2 - (\lambda^2 - 1) \cdot x + \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1) \cdot x^2 - (\lambda - 1)(\lambda + 1) \cdot x + (\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda \cdot x^2 - (\lambda + 1) \cdot x + 1 = 0$

γ) $\Delta = [-(\lambda + 1)^2] - 4\lambda = \lambda^2 + 2\lambda + 1 - 4\lambda = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 > 0 \quad (\lambda \neq 1)$. Άρα έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

$$\delta) x_1 = \frac{\lambda - 1 + \lambda - 1}{2\lambda} = \frac{2\lambda - 2}{2\lambda} = 1 \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{\lambda - 1 - \lambda + 1}{2\lambda} = \frac{0}{2\lambda} = 0$$

36663. Για την κάλυψη, με τετράγωνα πλακάκια, μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου Α με πλευρά d cm ή πλακάκια τύπου Β με πλευρά $(d+1)$ cm.

α) Να βρείτε, ως συνάρτηση του d , το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α και κάθε πλακάκι τύπου Β.

β) Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου Α είτε με 128 τύπου Β, να βρείτε:

i) Τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου.

ii) Το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν.

Λύση

α) Τα πλακάκια τύπου Α έχουν εμβαδό d^2 cm² και τα πλακάκια τύπου Β έχουν εμβαδό $(d+1)^2$ cm².

β) i. Τα 200 πλακάκια τύπου Α καλύπτουν επιφάνεια $200d^2$ cm² και τα 128 πλακάκια τύπου Β καλύπτουν επιφάνεια $128(d+1)^2$ cm². Επειδή η επιφάνεια και στις δύο περιπτώσεις είναι η ίδια, ισχύει ότι $200d^2 = 128(d+1)^2 \Leftrightarrow 200d^2 = 128(d^2 + 2d + 1) \Leftrightarrow 200d^2 = 128d^2 + 256d + 128 \Leftrightarrow 72d^2 - 256d - 128 = 0 \Leftrightarrow 9d^2 - 32d - 16 = 0$.

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με $\Delta = 1600$ και ρίζες $d = 4$ ή $d = -\frac{4}{9}$ απορρίπτεται γιατί $d > 0$.

Άρα κάθε πλακάκι τύπου Α έχει πλευρά 4 cm και κάθε πλακάκι τύπου Β έχει πλευρά 5 cm.

ii. Η επιφάνεια που καλύπτουν έχει εμβαδό $E = 200d^2 = 200 \cdot 16 = 3.200$ cm².

3^ο Θέμα

14749. α) i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ορίζεται η παράσταση: $A = \frac{x}{x - |x|}$.

ii. Για τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση A , να δείξετε ότι $A = \frac{1}{2}$.

β) Για $x < 0$, να λύσετε την εξίσωση: $\frac{x^3}{x - |x|} = \frac{3}{2}x + 2$.

Λύση

α) i. Για να ορίζεται η A πρέπει $x - |x| \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq x$ (1).

Επειδή $|x| = x$ όταν $x \geq 0$, η (1) αληθεύει όταν $x < 0$.

ii. Για $x < 0$ είναι $A = \frac{x}{x - (-x)} = \frac{x}{x + x} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$.

β) Για $x < 0$ είναι $\frac{x^3}{x-|x|} = \frac{3}{2}x + 2 \Leftrightarrow \frac{x^3}{x+x} = \frac{3}{2}x + 2 \Leftrightarrow \frac{x^3}{2x} = \frac{3}{2}x + 2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{3}{2}x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$.

Το τριώνυμο $x^2 - 3x - 4$ έχει $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25$ και ρίζες $x_1 = \frac{3-5}{2} = -1$ δεκτή ή $x_2 = \frac{3+5}{2} = 4$ απορρίπτεται.

14578. α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση $\Pi = \frac{2x^2-1}{x^2-x} + \frac{1}{1-x}$.

β) Για τις τιμές του x που βρήκατε στο α) ερώτημα, να λύσετε την εξίσωση: $\frac{2x^2-1}{x^2-x} + \frac{1}{1-x} = 0$.

Λύση

α) Για να ορίζεται η παράσταση Π πρέπει

$$\begin{cases} x^2 - x \neq 0 \\ 1 - x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) \neq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \text{ και } x \neq 1 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ και } x \neq 1$$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ είναι

$$\frac{2x^2-1}{x^2-x} + \frac{1}{1-x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-1}{x(x-1)} - \frac{1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 - x = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$$

$$\text{Είναι } \Delta = 1 + 8 = 9 \text{ άρα } x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \text{ απορρίπτεται} \\ -\frac{1}{2} \text{ δεκτή} \end{cases}.$$

Εξισώσεις που ανάγονται σε 2ου βαθμού

Θέμα 4ο

33826. α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (1) με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι αν $\gamma < 0$ τότε:

i) $\beta^2 - 4\gamma > 0$

ii) η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

Λύση

α) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ (1). Αν στην εξίσωση (1) θέσουμε $\alpha = x^2$ προκύπτει η εξίσωση $\alpha^2 - 8\alpha - 9 = 0$ με ρίζες τους αριθμούς -1, 9. Τότε $x^2 = -1$ αδύνατη ή $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$, άρα η (1) έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες.

β) $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (2). Αν στην εξίσωση (2) θέσουμε $\omega = x^2$ (3), προκύπτει η εξίσωση $\omega^2 + \beta \cdot \omega + \gamma = 0$ (3)

i) Η (3) έχει διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\gamma$ και επειδή $\beta^2 \geq 0$, $\gamma < 0 \Leftrightarrow -4\gamma > 0$ είναι και $\Delta > 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\gamma > 0$.

ii) Επειδή $\Delta > 0$ η (3) έχει δύο ρίζες ω_1, ω_2 πραγματικές και άνισες. Από τις σχέσεις Vieta έχουμε:

$P = \omega_1 \cdot \omega_2 = \gamma < 0$. Άρα η (3) έχει δύο ετερόσημες ρίζες. Έστω ω_1 η θετική ρίζα και ω_2 η αρνητική ρίζα.

Από την (2) $\Rightarrow x^2 = \omega_1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\omega_1}$ ή $x^2 = \omega_2 < 0$ αδύνατη. Άρα η (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες. Όμοια αν $\omega_1 > 0$ και $\omega_2 < 0$.

Τύποι Vieta

Θέμα 2ο

14577. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - x - 2 = 0$ (1).

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -1 .

β) Να βρείτε και τη δεύτερη ρίζα της εξίσωσης (1).

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $A = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x}$, $x \neq 0$, $x \neq -1$.

Λύση

α) Είναι $(-1)^2 - (-1) - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$

β) Αν η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 = -1$ τότε από τις σχέσεις Vieta είναι

$$S = x_1 + x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 1 \Leftrightarrow -1 + x_2 = 1 \Leftrightarrow x_2 = 2 \text{ ή αλλιώς από}$$

$$P = x_1 x_2 \Leftrightarrow x_1 x_2 = -2 \Leftrightarrow -x_2 = -2 \Leftrightarrow x_2 = 2.$$

$$\gamma) \text{ Για κάθε } x \in \mathbb{R}^* - \{-1\}: A = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x} = \frac{(x+1)(x-2)}{x(x+1)} = \frac{x-2}{x}$$

34150. Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α, β τέτοιοι ώστε: $\alpha + \beta = 12$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 272$.

α) Με τη βοήθεια της ταυτότητας $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, να δείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -64$.

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α, β .

γ) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α, β .

Λύση

$$\alpha) (\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \Leftrightarrow 2\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2 - \alpha^2 - \beta^2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha\beta = \frac{(\alpha + \beta)^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}{2} = \frac{12^2 - 272}{2} = \frac{144 - 272}{2} = \frac{-128}{2} = -64$$

β) Η ζητούμενη εξίσωση έχει άθροισμα ριζών $S = \alpha + \beta = 12$, γινόμενο ριζών $P = \alpha \cdot \beta = -64$ και είναι η $x^2 - 12x - 64 = 0$ (1).

$$\gamma) \text{ Η εξίσωση έχει διακρίνουσα } \Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-64) = 400 = 20^2 \text{ και ρίζες } x_1 = \frac{12 + 20}{2} = 16 \text{ και}$$

$$x_2 = \frac{12 - 20}{2} = -4. \text{ Οι } \alpha, \beta \text{ είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1) άρα } \alpha = 16 \text{ και } \beta = -4 \text{ ή } \alpha = -4 \text{ και } \beta = 16.$$

34154. Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{3-\sqrt{7}}$ και $B = \frac{1}{3+\sqrt{7}}$

α) Να δείξετε ότι: $A + B = 3$ και $A \cdot B = \frac{1}{2}$.

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς A, B .

Λύση

$$\alpha) \text{ i) } A + B = \frac{1}{3-\sqrt{7}} + \frac{1}{3+\sqrt{7}} \Leftrightarrow A + B = \frac{3-\sqrt{7}}{(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})} + \frac{3+\sqrt{7}}{(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})} \Leftrightarrow$$

$$A + B = \frac{\cancel{3-\sqrt{7}} + \cancel{3+\sqrt{7}}}{(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})} = \frac{6}{3^2 - \sqrt{7}^2} = \frac{6}{9-7} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\text{ii) } A \cdot B = \frac{1}{3-\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{3+\sqrt{7}} = \frac{1}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})} = \frac{1}{3^2 - \sqrt{7}^2} = \frac{1}{9-7} = \frac{1}{2}$$

β) Η ζητούμενη εξίσωση έχει άθροισμα ριζών $S = A + B = 3$, γινόμενο ριζών $P = A \cdot B = \frac{1}{2}$ και είναι η

$$x^2 - 3x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 1 = 0.$$

34436. Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{5+\sqrt{5}}$ και $B = \frac{1}{5-\sqrt{5}}$.

α) Να δείξετε ότι: **i)** $A + B = \frac{1}{2}$ **ii)** $A \cdot B = \frac{1}{20}$

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς A και B .

Λύση

$$\alpha) \text{ i) } A + B = \frac{1}{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{5-\sqrt{5}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A + B = \frac{5-\sqrt{5}}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})} + \frac{5+\sqrt{5}}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})} \Leftrightarrow$$

$$A + B = \frac{\cancel{5-\sqrt{5}} + \cancel{5+\sqrt{5}}}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})} = \frac{10}{5^2 - \sqrt{5}^2} = \frac{10}{25-5} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ii) } A \cdot B = \frac{1}{5+\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{5-\sqrt{5}} = \frac{1}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})} = \frac{1}{5^2 - \sqrt{5}^2} = \frac{1}{25-5} = \frac{1}{20}$$

β) Η ζητούμενη εξίσωση έχει άθροισμα ριζών $S = A + B = \frac{1}{2}$, γινόμενο ριζών $P = A \cdot B = \frac{1}{20}$ και είναι η

$$x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{20} = 0 \Leftrightarrow 20x^2 - 10x + 1 = 0.$$

34920. Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + x - 1$ (1).

α) Αν x_1, x_2 είναι ρίζες του τριωνύμου (1), να βρείτε την τιμή των παραστάσεων $x_1 + x_2$, $x_1 x_2$ και $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

β) Αν $\frac{1}{x_1} = -1$ και $\frac{1}{x_2} = 2$, να βρείτε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες τις $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$.

Λύση

α) Από τις σχέσεις Vieta :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{1}{2}, \quad P = x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2}{x_1 \cdot x_2} + \frac{x_1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = 1$$

β) Το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι $S' = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1$ και το γινόμενο των ριζών της είναι

$$P' = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = -2. \quad \text{Η ζητούμενη εξίσωση είναι η } x^2 - x - 2 = 0.$$

35038. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\alpha \cdot \beta = 4$ και $\alpha^2 \beta + \alpha \beta^2 = 20$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha + \beta = 5$.

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

Λύση

$$\alpha) \alpha \cdot \beta = 4 \quad (1) \quad \alpha^2 \beta + \alpha \beta^2 = 20 \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta (\alpha + \beta) = 20 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 4(\alpha + \beta) = 20 \stackrel{(:4)}{\Leftrightarrow} \alpha + \beta = 5$$

β) Η ζητούμενη εξίσωση έχει άθροισμα ριζών $S = \alpha + \beta = 5$, γινόμενο ριζών $P = \alpha \cdot \beta = 4$ και είναι η

$$x^2 - 5x + 4 = 0. \quad \text{Η εξίσωση έχει διακρίνουσα } \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9 = 3^2 \quad \text{και ρίζες } x_1 = \frac{5+3}{2} = 4 \quad \text{και} \\ x_2 = \frac{5-3}{2} = 1, \quad \text{άρα } \alpha = 4 \quad \text{και } \beta = 1 \quad \text{ή } \alpha = 1 \quad \text{και } \beta = 4.$$

36890. α) Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| = 3$.

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του α) ερωτήματος.

Λύση

$$\alpha) |x - 2| = 3 \Leftrightarrow (x - 2 = 3 \Leftrightarrow x = 5) \quad \text{ή} \quad (x - 2 = -3 \Leftrightarrow x = -1)$$

β) Το άθροισμα των ριζών είναι $S = 5 - 1 = 4$ και το γινόμενο των ριζών είναι: $P = 5 \cdot (-1) = -5$.

Η ζητούμενη εξίσωση είναι $x^2 - 4x - 5 = 0$.

37171. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\alpha + \beta = 2$ και $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = -30$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -15$.

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

Λύση

$$\alpha) \alpha + \beta = 2 \quad (1) \quad \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = -30 \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta(\alpha + \beta) = -30 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \alpha \cdot \beta \cdot 2 = -30 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \alpha \cdot \beta = -15$$

β) Η ζητούμενη εξίσωση έχει άθροισμα ριζών $S = \alpha + \beta = 2$, γινόμενο ριζών $P = \alpha \cdot \beta = -15$ και είναι η

$$x^2 - 2x - 15 = 0. \text{ Η εξίσωση έχει διακρίνουσα } \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 64 = 8^2 \text{ και ρίζες } x_1 = \frac{2+8}{2} = 5 \text{ και}$$

$$x_2 = \frac{2-8}{2} = -3, \text{ άρα } \alpha = 5 \text{ και } \beta = -3 \text{ ή } \alpha = -3 \text{ και } \beta = 5.$$

Θέμα 4ο

14490. Έστω Ω το σύνολο που έχει ως στοιχεία τους αριθμούς που είναι οι ενδείξεις ενός ζαριού.

α) Να γράψετε με αναγραφή το σύνολο Ω .

β) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda - 2 = 0$, με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

i) Το σύνολο A που περιέχει ως στοιχεία τις τιμές του $\lambda \in \Omega$, αν επιπλέον γνωρίζετε ότι η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

ii) Την πραγματική τιμή του λ , αν η εξίσωση έχει ρίζες αντίστροφες.

γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β ii) να υπολογίσετε τις ρίζες της εξίσωσης.

Λύση

α) Οι ενδείξεις ενός ζαριού είναι οι ακέραιες τιμές από το 1 ως το 6. Άρα $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

β) i. Η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda - 2 = 0$ είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 12 - 4\lambda$. Η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες όταν $\Delta < 0 \Leftrightarrow 12 - 4\lambda < 0 \Leftrightarrow -4\lambda < -12 \Leftrightarrow \lambda > 3$, άρα $\lambda = 4$ ή 5 ή 6 .
Οπότε $A = \{4, 5, 6\}$.

ii. Έστω x_1, x_2 οι ρίζες. Επειδή είναι αντίστροφοι αριθμοί ισχύει ότι $x_1 x_2 = 1 \Leftrightarrow P = 1 \Leftrightarrow \lambda - 2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = 3$.

γ) Για $\lambda = 3$ η εξίσωση γίνεται $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Άρα η ρίζα της εξίσωσης είναι η $x=1$ διπλή.

14759. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 + 6\alpha x + 6\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $f(\alpha) + f(\beta) \geq \beta^2 - 36$.

β) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες $f(\alpha) + f(\beta) = \beta^2 - 36$.

γ) Αν $\alpha = 2$ και $\beta = -6$

i. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 6x$.

ii. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος γι), να δείξετε ότι ισχύει: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{6}$.

Λύση

$$\alpha) f(\alpha) + f(\beta) \geq \beta^2 - 36 \Leftrightarrow 3\alpha^2 + 6\alpha^2 + 6\beta + 3\beta^2 + 6\alpha\beta + 6\beta \geq \beta^2 - 36 \Leftrightarrow$$

$$9\alpha^2 + 2\beta^2 + 6\alpha\beta + 12\beta + 36 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(9\alpha^2 + 6\alpha\beta + \beta^2) + (\beta^2 + 12\beta + 36) \geq 0 \Leftrightarrow (3\alpha + \beta)^2 + (\beta + 6)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει σαν άθροισμα τετραγώνων.}$$

β) Βάσει του ερωτήματος α), έχουμε: $f(\alpha) + f(\beta) = \beta^2 - 36 \Leftrightarrow (3\alpha + \beta)^2 + (\beta + 6)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta = 0 \\ \beta + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha - 6 = 0 \\ \beta = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha = 6 \\ \beta = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -6 \end{cases}$$

γ) Για $\alpha = 2$ και $\beta = -6$ είναι $f(x) = 3x^2 + 12x - 36$.

i. $f(x) = 6x \Leftrightarrow 3x^2 + 12x - 36 = 6x \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 36 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 12 = 0$

Είναι $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 4 + 48 = 52 = 4 \cdot 13$ και

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 \cdot 13}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{13}}{2} = \frac{2(-1 \pm \sqrt{13})}{2} = \begin{cases} x_1 = -1 + \sqrt{13} \\ x_2 = -1 - \sqrt{13} \end{cases}$$

ii. Από τους τύπους του Vieta είναι $x_1 + x_2 = S = -\frac{2}{1} = -2$ και $x_1 x_2 = P = \frac{-12}{1} = -12$.

Είναι $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2}{x_1 x_2} + \frac{x_1}{x_1 x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{-2}{-12} = \frac{1}{6}$

33584. Δίνονται η εξίσωση: $x^2 - 2x + \lambda = 0$, με παράμετρο $\lambda < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

β) Να αποδείξετε ότι $x_1 + x_2 = 2$.

γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον $|x_1 - 2| = |x_2 + 2|$ τότε:

i) Να δείξετε ότι $x_1 - x_2 = 4$.

ii) Να προσδιορίσετε τις ρίζες x_1, x_2 την τιμή του λ .

Λύση

α) Η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = (-2)^2 - 4\lambda = 4 - 4\lambda = 4(1 - \lambda) > 0$ γιατί $\lambda < 1 \Leftrightarrow 1 - \lambda > 0 \Leftrightarrow 4(1 - \lambda) > 0$. Άρα έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Από τις σχέσεις Vieta έχουμε: $S = x_1 + x_2 = 2$ (1)

γ) i) Από την (1) $\Rightarrow x_1 - 2 = -x_2$.

Επομένως $|x_1 - 2| = |x_2 + 2| \Leftrightarrow (x_1 - 2 = x_2 + 2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 = 4)$ ή

$$\left(x_1 - 2 = -x_2 - 2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 2 = 0 \text{ άτοπο} \right) \text{ Άρα } x_1 - x_2 = 4 \text{ (2)}$$

ii) Από (1)+(2) $\Rightarrow 2x_1 = 6 \Leftrightarrow x_1 = 3$ και $x_2 = 2 - x_1 = -1$ Από τις σχέσεις Vieta: $P = x_1 \cdot x_2 = \lambda \Leftrightarrow \lambda = -3$

33585. Δίνονται η εξίσωση: $\alpha x^2 - (\alpha^2 - 1)x - \alpha = 0$ με παράμετρο $\alpha \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = (\alpha^2 + 1)^2$.

β) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι $p_1 = \alpha$ και $p_2 = -\frac{1}{\alpha}$.

γ) Να βρεθούν οι τιμές του α ώστε $|p_1 - p_2| = 2$.

Λύση

α) $\Delta = [-(\alpha^2 - 1)]^2 - 4 \cdot \alpha \cdot (-\alpha) = \alpha^4 - 2\alpha^2 + 1 + 4\alpha^2 = \alpha^4 + 2\alpha^2 + 1 = (\alpha^2 + 1)^2$

β) Οι ρίζες της εξίσωσης είναι: $p_1 = \frac{\alpha^2 - 1 + \alpha^2 + 1}{2\alpha} = \frac{2\alpha^2}{2\alpha} = \alpha$ και $p_2 = \frac{\alpha^2 - 1 - \alpha^2 - 1}{2\alpha} = \frac{-2}{2\alpha} = -\frac{1}{\alpha}$

γ) Από τις σχέσεις Vieta έχουμε: $S = x_1 + x_2 = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}$, $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{-1}{\alpha} = -1$

$$|p_1 - p_2| = 2 \Leftrightarrow |p_1 - p_2|^2 = 4 \Leftrightarrow (p_1 - p_2)^2 = 4 \Leftrightarrow p_1^2 - 2p_1p_2 + p_2^2 = 4 \Leftrightarrow (p_1 + p_2)^2 - 4p_1p_2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}\right)^2 - 4(-1) = 4 \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}\right)^2 + 4 = 4 \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha = \pm 1$$

34310. Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ , δηλαδή σταθερή.

β) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης συναρτήσει του λ .

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες.

Λύση

α) $\Delta = (2\lambda - 1)^2 - 4 \cdot \lambda \cdot (\lambda - 1) = 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 - 4\lambda^2 + 4\lambda = 1$ ανεξάρτητη του λ

β) $x_1 = \frac{-(2\lambda - 1) - 1}{2\lambda} = \frac{-2\lambda + 1 - 1}{2\lambda} = \frac{-2\lambda}{2\lambda} = -1$, $x_2 = \frac{-(2\lambda - 1) + 1}{2\lambda} = \frac{-2\lambda + 1 + 1}{2\lambda} = \frac{2(1 - \lambda)}{2\lambda} = \frac{1 - \lambda}{\lambda}$

γ) $d(x_1, x_2) = 2 \Leftrightarrow |x_2 - x_1| = 2 \Leftrightarrow \left|\frac{1 - \lambda}{\lambda} + 1\right| = 2 \Leftrightarrow \left|\frac{1 - \lambda + \lambda}{\lambda}\right| = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{|\lambda|} = 2 \Leftrightarrow 1 = 2|\lambda| \Leftrightarrow |\lambda| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\lambda = \pm \frac{1}{2}.$$

36675. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4x + 2 - \lambda^2 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1):

i) Να βρείτε το $S = x_1 + x_2$.

ii) Να βρείτε το $P = x_1 \cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ .

γ) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 + \sqrt{3}$ τότε:

i) να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 - \sqrt{3}$.

ii) να βρείτε το λ .

Λύση

α) Η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = (-4)^2 - 4(2 - \lambda^2) = 16 - 8 + 4\lambda^2 = 8 + 4\lambda^2 > 0$ άρα έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) i) $S = x_1 + x_2 = 4$

ii) $P = x_1 \cdot x_2 = 2 - \lambda^2$

γ) i) Αν $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ τότε :

$$x_1 + x_2 = 4 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{3} + x_2 = 4 \Leftrightarrow x_2 = 4 - 2 - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$$

ii) $x_1 \cdot x_2 = 2 - \lambda^2 \Leftrightarrow (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 2 - \lambda^2 \Leftrightarrow 2^2 - \sqrt{3}^2 = 2 - \lambda^2 \Leftrightarrow 4 - 3 = 2 - \lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ**Ανισώσεις 1^{ου} βαθμού****Θέμα 2ο**

36888. α) Να λύσετε την ανίσωση $3x - 1 < x + 9$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $2 - \frac{x}{2} \leq x + \frac{1}{2}$.

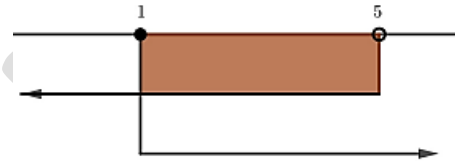
γ) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων α) και β) και να τις γράψετε σε μορφή διαστήματος.

Λύση

α) $3x - 1 < x + 9 \Leftrightarrow 3x - x < 9 + 1 \Leftrightarrow 2x < 10 \Leftrightarrow x < 5$.

β) $2 - \frac{x}{2} \leq x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4 - x \leq 2x + 1 \Leftrightarrow 3 \leq 3x \Leftrightarrow x \geq 1$

γ) Το σύνολο των κοινών τους λύσεων είναι το $[1, 5)$.

**Θέμα 4ο**

13312. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 6x + \lambda = 0$ (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

β) Αν δύο πραγματικοί αριθμοί α και β έχουν σταθερό άθροισμα 6 και γινόμενο $\alpha \cdot \beta = \lambda$, τότε:

i. Να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta \leq 9$.

ii. Να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = 9$ αν και μόνο αν $\alpha = \beta$.

γ) Να δείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με διαστάσεις α , β και περίμετρο 12, μεγαλύτερο εμβαδόν έχει το τετράγωνο.

Λύση

α) Επειδή η (1) είναι 2^{ου} βαθμού, έχει πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \lambda \geq 0 \Leftrightarrow 36 - 4\lambda \geq 0 \Leftrightarrow 36 \geq 4\lambda \Leftrightarrow \lambda \leq 9$$

β) i. Επειδή οι αριθμοί α και β έχουν σταθερό άθροισμα 6 και γινόμενο $\alpha \cdot \beta = \lambda$, από τους τύπους του Vieta προκύπτει ότι είναι ρίζες της (1). Είναι $P = x_1 x_2 \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta = \lambda$, όμως $\lambda \leq 9$ άρα και $\alpha \cdot \beta \leq 9$.

ii. Επειδή οι αριθμοί α , β είναι ρίζες της (1), θα είναι $\alpha = \beta$, αν και μόνο αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow \lambda = 9 \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta = 9$.

γ) Τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με διαστάσεις α , β έχουν περίμετρο $2\alpha + 2\beta$, άρα $2\alpha + 2\beta = 12 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 6$. Το εμβαδόν των ορθογωνίων είναι $\alpha \cdot \beta$. Στο β σκέλος δείξαμε ότι όταν $\alpha + \beta = 6$ τότε $\alpha \cdot \beta \leq 9$ και επιπλέον η ισότητα $\alpha \cdot \beta = 9$ ισχύει μόνο όταν $\alpha = \beta$. Άρα η μεγαλύτερη τιμή του εμβαδού είναι 9 και αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι ίσες, δηλαδή αν και μόνο αν είναι τετράγωνο.

Ανισώσεις με απόλυτα

Θέμα 2ο

13025.α) Να λύσετε την ανίσωση $-\frac{3-2x}{7} \geq 5$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $|-x-1| \leq 23$.

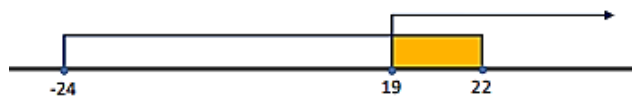
γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

Λύση

$$\alpha) -\frac{3-2x}{7} \geq 5 \Leftrightarrow -(3-2x) \geq 35 \Leftrightarrow -3+2x \geq 35 \Leftrightarrow 2x \geq 38 \Leftrightarrow x \geq 19$$

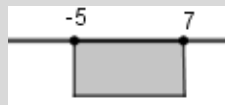
$$\beta) |-x-1| \leq 23 \Leftrightarrow |-(x+1)| \leq 23 \Leftrightarrow |x+1| \leq 23 \Leftrightarrow -23 \leq x+1 \leq 23 \Leftrightarrow -24 \leq x \leq 22$$

γ) Παριστάνουμε τις λύσεις των δύο παραπάνω ανισώσεων στον ίδιο άξονα, απ' όπου προκύπτει ότι $19 \leq x \leq 22$.

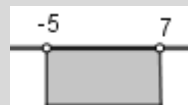


14295. α) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της ανίσωσης $|x-1| \geq 6$ και στη συνέχεια να βρείτε τη θέση του πραγματικού αριθμού x πάνω στον άξονα, επιλέγοντας μια από τις παρακάτω αναπαραστάσεις:

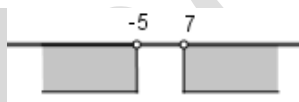
1.



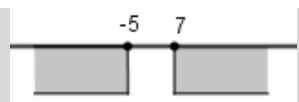
2.



3.



4.



β) Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο α) ερώτημα.

Λύση

α) Είναι $|x-1| \geq 6 \Leftrightarrow d(x,1) \geq 6$, δηλαδή η απόσταση του x από το 1 δεν είναι λιγότερη από 6. Σωστή είναι η 4.

$$\beta) |x-1| \geq 6 \Leftrightarrow (x-1 \leq -6 \Leftrightarrow x \leq -5) \text{ ή } (x-1 \geq 6 \Leftrightarrow x \geq 7)$$

14319. Δίνεται η ανίσωση $|2x-5| < 3$

α) Να λύσετε την ανίσωση.

β) αν ο αριθμός α είναι μια λύση της ανίσωσης να βρείτε το πρόσημο του γινομένου:

$$A = (\alpha-1)(\alpha-5)$$

Λύση

$$\alpha) |2x-5| < 3 \Leftrightarrow -3 < 2x-5 < 3 \Leftrightarrow 2 < 2x < 8 \Leftrightarrow 1 < x < 4$$

β) Αν ο αριθμός α είναι μια λύση της ανίσωσης τότε $1 < \alpha < 4$, οπότε $\alpha-1 > 0$ και

$$\alpha-5, 4-5 = -1 \Leftrightarrow \alpha-5 < 0, \text{ οπότε } A = (\alpha-1)(\alpha-5) < 0$$

34148. α) Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

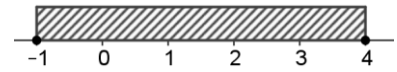
i) $|2x - 3| \leq 5$

ii) $|2x - 3| \geq 1$

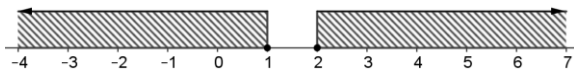
β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

Λύση

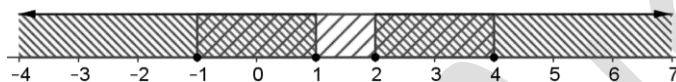
α) i) $|2x - 3| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq 2x - 3 \leq 5 \Leftrightarrow -2 \leq 2x \leq 8 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 4$



ii) $|2x - 3| \geq 1 \Leftrightarrow (2x - 3 \geq 1 \Leftrightarrow 2x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 2) \text{ ή } (2x - 3 \leq -1 \Leftrightarrow 2x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 1)$



β) $x \in [-1, 1] \cup [2, 4]$



34149. α) Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - x - 6 = 0$ (1).

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 1| < 2$ (2).

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2).

Λύση

α) $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 1 + 48 = 49 = 7^2$. $x_1 = \frac{1+7}{2 \cdot 2} = \frac{8}{4} = 2$ και $x_2 = \frac{1-7}{2 \cdot 2} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$

β) $|x - 1| < 2 \Leftrightarrow -2 < x - 1 < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 3 \Leftrightarrow x \in (1, 3)$

γ) Επειδή $2 \in (1, 3)$, ενώ $-\frac{3}{2} \notin (1, 3)$ το 2 είναι η ζητούμενη τιμή.

35296. α) Να λύσετε την ανίσωση $|x - 1| \geq 5$.

β) Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3.

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των (α) και (β).

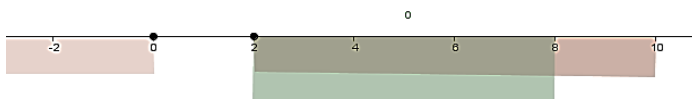
Λύση

α) $|x - 1| \geq 1 \Leftrightarrow (x - 1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 2) \text{ ή } (x - 1 \leq -1 \Leftrightarrow x \leq 0)$

Επομένως οι λύσεις της ανίσωσης είναι τα διαστήματα $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

β) $d(x, 5) < 3 \Leftrightarrow |x - 5| < 3 \Leftrightarrow -3 < x - 5 < 3 \Leftrightarrow 2 < x < 8$

γ) Οι κοινές λύσεις των (α) και (β) είναι το διάστημα $(2, 8)$



36886.α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-5| < 2$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $|2-3x| > 5$.

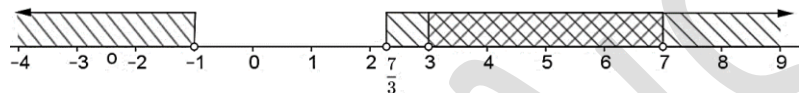
γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των δυο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

Λύση

$$\alpha) |x-5| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-5 < 2 \Leftrightarrow 3 < x < 7$$

$$\beta) |2-3x| > 5 \Leftrightarrow (2-3x > 5 \Leftrightarrow -3x > 3 \Leftrightarrow x < -1) \text{ ή } (2-3x < -5 \Leftrightarrow -3x < -7 \Leftrightarrow x > \frac{7}{3})$$

γ) Άρα $x \in (3, 7)$



36893.α) Να λύσετε την ανίσωση: $|2x-1| \leq 7$.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-1| > 2$.

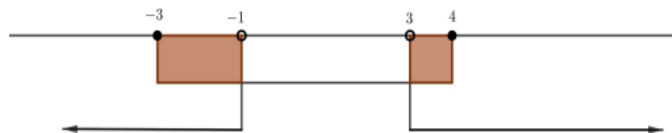
γ) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων α) και β) και να τις γράψετε σε μορφή διαστήματος.

Λύση

$$\alpha) |2x-1| \leq 7 \Leftrightarrow -7 \leq 2x-1 \leq 7 \Leftrightarrow -6 \leq 2x \leq 8 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 4$$

$$\beta) |x-1| > 2 \Leftrightarrow (x-1 < -2 \Leftrightarrow x < -1) \text{ ή } (x-1 > 2 \Leftrightarrow x > 3)$$

$$\gamma) x \in [-3, -1) \cup (3, 4]$$



36895.α) Να λύσετε την εξίσωση: $|2x+4| = 10$.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-5| > 1$.

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

$$\alpha) |2x+4| = 10 \Leftrightarrow (2x+4 = 10 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3) \text{ ή } (2x+4 = -10 \Leftrightarrow 2x = -14 \Leftrightarrow x = -7)$$

$$\beta) |x-5| > 1 \Leftrightarrow (x-5 < -1 \Leftrightarrow x < 4) \text{ ή } (x-5 > 1 \Leftrightarrow x > 6)$$

γ) Επειδή και οι δύο λύσεις είναι μικρότερες του 4, είναι λύσεις και της ανίσωσης.

37191.α) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών: **i.** $|1-2x| < 5$ **ii.** $|1-2x| \geq 1$

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

Λύση

α) i. $|1-2x| < 5 \Leftrightarrow -5 < 1-2x < 5 \Leftrightarrow -6 < -2x < 4 \Leftrightarrow -2 < x < 3$

ii. $|1-2x| \geq 1 \Leftrightarrow (1-2x \leq -1 \Leftrightarrow -2x \leq -2 \Leftrightarrow x \geq 1) \text{ ή } (1-2x \geq 1 \Leftrightarrow x \leq 0)$

β) Οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (-2, 0] \cup [1, 3)$ άρα οι ακέραιες κοινές λύσεις είναι οι αριθμοί $-1, 0, 1, 2$.



4^ο Θέμα

13474. Δίνονται οι ανισώσεις $|x-1| \leq \sqrt{3}$ (1) και $3 - \frac{x+4}{2} < 0$ (2)

α) Να λύσετε την ανίσωση (1).

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη λύση της (1).

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2).

δ) Να αποδείξετε ότι αν οι αριθμοί α, β είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) τότε και ο αριθμός $\frac{3\alpha+4\beta}{7}$ είναι επίσης κοινή λύση τους.

Λύση

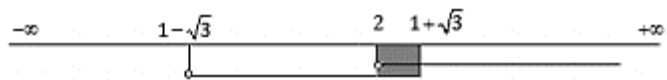
α) $|x-1| \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq x-1 \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow 1-\sqrt{3} \leq x \leq 1+\sqrt{3}$

β) Η ζητούμενη εξίσωση 2^{ου} βαθμού έχει ρίζες τις $x_1 = 1-\sqrt{3}$ και $x_2 = 1+\sqrt{3}$. Το άθροισμα ριζών της εξίσωσης είναι $S = 1-\sqrt{3} + 1+\sqrt{3} = 2$ και το γινόμενο των ριζών είναι

$P = (1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) = 1^2 - (\sqrt{3})^2 = 1-3 = -2$, οπότε σύμφωνα με τους τύπους του Vieta η εξίσωση είναι η $x^2 - 2x - 2 = 0$.

γ) $3 - \frac{x+4}{2} < 0 \Leftrightarrow 3 < \frac{x+4}{2} \Leftrightarrow 6 < x+4 \Leftrightarrow x > 2$

Όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα, οι κοινές λύσεις των δυο ανισώσεων είναι όλοι οι αριθμοί x με $2 < x \leq 1+\sqrt{3}$.



δ) Επειδή οι αριθμοί α, β είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2), ισχύει ότι:

$2 < \alpha \leq 1+\sqrt{3} \Leftrightarrow 6 < 3\alpha \leq 3+3\sqrt{3}$ (3) και $2 < \beta \leq 1+\sqrt{3} \Leftrightarrow 8 < 4\beta \leq 4+4\sqrt{3}$ (4)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (3), (4) προκύπτει: $14 < 3\alpha + 4\beta \leq 7 + 7\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{14}{7} < \frac{3\alpha + 4\beta}{7} \leq \frac{7(1+\sqrt{3})}{7} \Leftrightarrow$

$2 < \frac{3\alpha + 4\beta}{7} \leq 1+\sqrt{3}$. Από την τελευταία συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός $\frac{3\alpha + 4\beta}{7}$ είναι επίσης κοινή λύση των (1) και (2), που είναι το ζητούμενο.

14650. α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-1| \leq 3$ (1).

β) Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x-1|$.

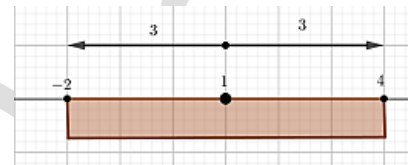
γ) Να βρείτε όλους τους ακέραιους x που ικανοποιούν την ανίσωση $|x-1| \leq 3$.

δ) Να βρείτε τους ακέραιους x που ικανοποιούν την ανίσωση $||x|-1| \leq 3$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

$$\alpha) |x-1| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x-1 \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4$$

β) Το σύνολο λύσεων της ανίσωσης (1) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Στον άξονα φαίνεται ότι οι αριθμοί που απέχουν απόσταση από το 1 μικρότερη ή ίση του 1 βρίσκονται στο διάστημα $[-2, 4]$.



γ) Οι ακέραιοι που βρίσκονται στο διάστημα του διπλανού σχήματος είναι οι: -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4.

δ) Αν θέσουμε $|x| = \omega \geq 0$, η ανίσωση $||x|-1| \leq 3$ γίνεται $|\omega-1| \leq 3$ και με βάση το γ σκέλος οι δυνατές τιμές του ω είναι 0, 1, 2, 3, 4. Τότε

$$|x|=0 \Leftrightarrow x=0 \quad \text{ή} \quad |x|=1 \Leftrightarrow x=\pm 1 \quad \text{ή} \quad |x|=2 \Leftrightarrow x=\pm 2 \quad \text{ή} \quad |x|=3 \Leftrightarrow x=\pm 3 \quad \text{ή} \quad |x|=4 \Leftrightarrow x=\pm 4.$$

2ος τρόπος

$$||x|-1| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq |x|-1 \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq |x| \leq 4. \text{ Όμως } |x| \geq -2 \text{ οπότε έχουμε } |x| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4.$$

Οι ακέραιοι που ικανοποιούν την ανισότητα είναι οι: -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4.

33893.α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x-4| < 2$.

β) Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x που η απόστασή του από το 4 στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη από 2.

i. Να δείξετε ότι $3x-4 > 0$.

ii. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλάσιου του αριθμού αυτού από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14.

iii. Να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων περιέχεται η τιμή της απόστασης του $3x$ από το 19.

Λύση

$$\alpha) |x-4| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-4 < 2 \Leftrightarrow 2 < x < 6 \Leftrightarrow x \in (2, 6)$$

β) i. $2 < x < 6 \Leftrightarrow 6 < 3x < 18 \Leftrightarrow 2 < 3x-4 < 8$, άρα $3x-4 > 0$.

ii. Έχουμε ότι $d(x, 4) < 2 \Leftrightarrow |x-4| < 2 \Leftrightarrow 2 < x < 6 \Leftrightarrow 6 < 3x < 18 \Leftrightarrow 2 < 3x-4 < 14$ (1)

Άρα $3x-4 > 0$ και $|3x-4| = 3x-4$. Επομένως από (1) $2 < 3x-4 < 14$ δηλαδή η απόσταση του τριπλάσιου του αριθμού αυτού από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14.

iii. $d(3x, 19) = |3x-19|$ και $2 < x < 6 \Leftrightarrow 6 < 3x < 18 \Leftrightarrow -13 < 3x-19 < -1$ (2) άρα $3x-19 < 0$. Άρα

$$d(3x, 19) = |3x-19| = -3x+19 \text{ και } (2) \Rightarrow 13 > -3x+19 > 1 \Leftrightarrow 1 < -3x+19 < 13 \Leftrightarrow 1 < d(3x, 19) < 13$$

Θέμα 3ο

14601. Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x-1| < 1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $0 < x < 1$.

β) Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: $1, x, x^2$.

Λύση

α) $|2x-1| < 1 \Leftrightarrow -1 < 2x-1 < 1 \Leftrightarrow 0 < 2x < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

β) Από (α) ερώτημα έχουμε $x < 1 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x^2 < x$, άρα $x^2 < x < 1$.

14753. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί x για τους οποίους ισχύει $2|x|-2 \leq 0$ (1).

α) Να δείξετε ότι $x \in [-1, 1]$.

β) Να δείξετε ότι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που ικανοποιούν την (1) απέχουν από το -3 απόσταση το πολύ 4.

γ) Για τους πραγματικούς αριθμούς x που ικανοποιούν την (1) να γράψετε την παράσταση $A = |2x-3| - |4-3x|$ χωρίς τις απόλυτες τιμές.

Λύση

α) $2|x|-2 \leq 0 \Leftrightarrow 2|x| \leq 2 \Leftrightarrow |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.

β) Αρκεί να δείξουμε ότι $d(x, -3) \leq 4$.

Είναι $d(x, -3) = |x+3| \leq |x|+3 \leq 1+3 \leq 4$

γ) Είναι $-1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2x \leq 2 \Leftrightarrow -5 \leq 2x-3 \leq -1$, οπότε $|2x-3| = -2x+3$.

Είναι $-1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 3 \geq -3x \geq -3 \Leftrightarrow -3 \leq -3x \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq 4-3x \leq 7$, οπότε $|4-3x| = 4-3x$. Η παράσταση A γίνεται: $A = |2x-3| - |4-3x| = -2x+3 - (4-3x) = -2x+3-4+3x = x-1$

Παραγοντοποίηση τριωνύμου

Θέμα 2ο

14474. Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + 3x - 5$.

α) Να εξετάσετε αν το 1 είναι ρίζα του τριωνύμου.

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

Λύση

α) Είναι $2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 5 = 2 + 3 - 5 = 0$ άρα το 1 είναι ρίζα του τριωνύμου.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου με $x_1 = 1$ τότε από τους τύπους Vieta είναι

$$P = x_1 x_2 = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow x_2 = -\frac{5}{2} \text{ ή αλλιώς } S = x_1 + x_2 = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow 1 + x_2 = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x_2 = -\frac{5}{2}.$$

$$\text{Άρα είναι } 2x^2 + 3x - 5 = 2(x-1)\left(x + \frac{5}{2}\right) = (x-1)(2x+5)$$

35382. Δίνεται η παράσταση: $K = \frac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 - 3x - 2}$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 2$.

β) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση K; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση K.

Λύση

α) $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 9 + 16 = 25$. Οι ρίζες του τριωνύμου είναι: $x_1 = \frac{3+5}{4} = 2$, $x_2 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$.

$$\text{Άρα } 2x^2 - 3x - 2 = 2(x-2)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x-2)(2x+1)$$

β) Θα πρέπει $2x^2 - 3x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ και $x \neq -\frac{1}{2}$

$$\gamma) K = \frac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 - 3x - 2} = \frac{(x-2)^2}{(x-2)(2x+1)} = \frac{x-2}{2x+1}$$

37169. Δίνεται το τριώνυμο $-x^2 + (\sqrt{3}-1)x + \sqrt{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta = (\sqrt{3}+1)^2$.

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

Λύση

$$\alpha) \Delta = (\sqrt{3}-1)^2 - 4 \cdot (-1)(\sqrt{3}) = \sqrt{3}^2 - 2\sqrt{3} + 1 + 4\sqrt{3} = \sqrt{3}^2 + 2\sqrt{3} + 1 = (\sqrt{3}+1)^2$$

$$\beta) \text{ Οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι } x_1 = \frac{-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}+1}{-2} = -1 \text{ και } x_2 = \frac{-\sqrt{3}-1-\sqrt{3}-1}{-2} = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3}.$$

$$\text{Επομένως } -x^2 + (\sqrt{3}-1)x + \sqrt{3} = -(x-\sqrt{3})(x+1)$$

Ανισώσεις 2^{ου} βαθμού

Θέμα 2ο

12722. Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = x^2 - x - 3$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του $f(x)$.

β) Να επιλύσετε την ανίσωση $-2f(x) < 0$.

Λύση

α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 1 + 12 = 13 > 0$

Άρα το $f(x)$ έχει δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις

$$x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{13}}{2} = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \text{ και } x_2 = \frac{-(-1) - \sqrt{13}}{2} = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$$

β) Επειδή $-2 < 0$, είναι $-2f(x) < 0$ όταν $f(x) > 0$ και επειδή $a = 1 > 0$, το τριώνυμο είναι ομόσημο του a

εκτός των ριζών του, άρα $x \in \left(-\infty, \frac{1 - \sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}, +\infty\right)$

12976. α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - x - 1$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $x(1 - 2x) \leq -1$.

Λύση

α) Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$ και ρίζες $x_1 = \frac{1 + \sqrt{9}}{4} = 1$, $x_2 = \frac{1 - \sqrt{9}}{4} = -\frac{1}{2}$

Είναι $2x^2 - x - 1 = 2(x - 1)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

β)

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	$+\infty$	
$2x^2-x-1$	+	0	-	0	+

$$x(1 - 2x) \leq -1 \Leftrightarrow x - 2x^2 \leq -1 \Leftrightarrow 0 \leq 2x^2 - x - 1$$

Από τον διπλανό πίνακα προσήμων του τριωνύμου, προκύπτει ότι $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty)$.

13321. α) Να λύσετε την εξίσωση $x^4 - 16 = 0$. (1)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + 3x \leq 0$. (2)

γ) Να εξετάσετε εάν οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι και λύσεις της ανίσωσης (2).

Λύση

α) $x^4 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^4 = 16 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[4]{16} \Leftrightarrow x = \pm 2$

β) $x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = -3$ άρα το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 + 3x$ φαίνεται στον πίνακα.

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης $x^2 + 3x \leq 0$ είναι οι $x \in [-3, 0]$.

x	$-\infty$	-3	0	$+\infty$
$x^2 + 3x$	+	0	-	+

γ) Από τις λύσεις της (1) μόνον η $x = -2$ είναι και λύση της (2).

14189. α) Αν $x^2 - 3x - 4 < 0$, να δείξετε ότι $-1 < x < 4$.

β) Δίνεται η παράσταση $A = |2x + 2| + |x - 5|$ με τις τιμές του x να επαληθεύουν την ανίσωση του ερωτήματος α). Να αποδείξετε ότι: $A = x + 7$.

Λύση

α) Το τριώνυμο $x^2 - 3x - 4$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25 \text{ και } x_1 = \frac{3 - \sqrt{25}}{2} = -1, x_2 = \frac{3 + \sqrt{25}}{2} = 4$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον διπλανό πίνακα. Επομένως $x^2 - 3x - 4 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 4$.

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$
$x^2 - 3x - 4$	+	-	+	+

β) Είναι $-1 < x < 4 \Leftrightarrow -1 < 2x < 4 \Leftrightarrow 1 < 2x + 2 < 6$, άρα

$$|2x + 2| = 2x + 2 \text{ και}$$

$$-1 < x < 4 \Leftrightarrow -6 < x - 5 < -1, \text{ άρα } |x - 5| = -x + 5.$$

$$\text{Είναι } A = |2x + 2| + |x - 5| = 2x + 2 - x + 5 = x + 7$$

34162.α) Να λύσετε τις ανισώσεις: $|2x - 5| \leq 3$ και $2x^2 - x - 1 \geq 0$.

β) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος α).

Λύση

$$\text{α)} |2x - 5| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq 2x - 5 \leq 3 \Leftrightarrow 2 \leq 2x \leq 8 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4$$

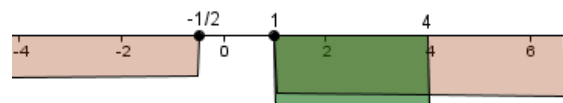
Για την $2x^2 - x - 1 \geq 0$, έχουμε:

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9 = 3^2 \text{ και } x_1 = \frac{1 + 3}{2 \cdot 2} = \frac{4}{4} = 1, x_2 = \frac{1 - 3}{2 \cdot 2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$2x^2 - x - 1$	+	-	+	+

άρα η λύση της ανίσωσης είναι $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty)$

β) Οι κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος α) είναι το διάστημα $[1, 4]$.



34919. α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 10x + 21 < 0$ (1).

β) Αν η ανίσωση (1) έχει λύσεις τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $3 < x < 7$ και ο αριθμός x είναι λύση της παραπάνω ανίσωσης, να δείξετε ότι η παράσταση $A = |x - 3| + |x - 7|$ είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

Λύση

α) Η εξίσωση $x^2 - 10x + 21 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 16$ και ρίζες $x_{1,2} = \frac{10 \pm 4}{2} = \begin{cases} 7 \\ 3 \end{cases}$.

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον διπλανό πίνακα.

Άρα $x^2 - 10x + 21 < 0 \Leftrightarrow x \in (3, 7)$

x	$-\infty$	3	7	$+\infty$	
$x^2 - 10x + 21$	+	o	-	o	+

β) Είναι $3 < x < 7$ άρα $x - 3 > 0$ και $x - 7 < 0$ άρα $A = |x - 3| + |x - 7| = x - 3 - x + 7 = 4$.

35030.α) Να αποδείξετε ότι $x^2 + 4x + 5 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση: $B = |x^2 + 4x + 5| - |x^2 + 4x + 4|$.

Λύση

α) $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4 < 0$. Άρα $x^2 + 4x + 5 > 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

β) $x^2 + 4x + 5 > 0 \Rightarrow |x^2 + 4x + 5| = x^2 + 4x + 5$

$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 \geq 0 \Rightarrow |x^2 + 4x + 4| = x^2 + 4x + 4$$

$$\text{Επομένως } B = x^2 + 4x + 5 - (x^2 + 4x + 4) = \cancel{x^2} + \cancel{4x} + 5 - \cancel{x^2} - \cancel{4x} - 4 = 1$$

35035. Δίνεται το τριώνυμο: $f(x) = 3x^2 + 9x - 12$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

β) Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (α).
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

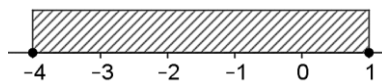
Λύση

α) $\Delta = 9^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-12) = 81 + 144 = 225 = 15^2$. Οι ρίζες είναι οι

$$\text{αριθμοί } x_1 = \frac{-9 + 15}{2 \cdot 3} = \frac{6}{6} = 1 \text{ και } x_2 = \frac{-9 - 15}{2 \cdot 3} = \frac{-24}{6} = -4$$

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$	
$3x^2 + 9x - 12$	+	o	-	o	+

Οι λύσεις της ανίσωσης είναι το διάστημα $[-4, 1]$



β) Για να είναι λύση πρέπει $\sqrt[3]{2} \in [-4, 1] \Leftrightarrow -4 \leq \sqrt[3]{2} \leq 1 \Leftrightarrow (-4)^3 \leq (\sqrt[3]{2})^3 \leq 1^3 \Leftrightarrow -64 \leq 2 \leq 1$ που δεν ισχύει, άρα ο αριθμός $\sqrt[3]{2} \notin [-4, 1]$ και δεν είναι λύση της ανίσωσης.

36887. Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 1$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του.

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες: $2x^2 - 3x + 1 < 0$.

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{1}{\sqrt{2}}$ και $\frac{\sqrt{3}}{2}$ είναι λύσεις της ανίσωσης του ερωτήματος β).

Λύση

α) $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1$, $x_1 = \frac{3+1}{2 \cdot 2} = 1$, $x_2 = \frac{3-1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}$ Επομένως οι ρίζες του είναι οι αριθμοί $1, \frac{1}{2}$

β) Οι λύσεις της ανίσωσης είναι το

διάστημα $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$2x^2-3x+1$	+	$\circ$	$\circ$ -	+

γ) Είναι $\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{2}$ και $\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{\sqrt{4}}{2} = \frac{2}{2} = 1$. Άρα ο $\frac{1}{\sqrt{2}}$ δεν είναι λύση ενώ ο $\frac{\sqrt{3}}{2}$ είναι λύση της ανίσωσης $2x^2 - 3x + 1 < 0$.

36892. α) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{|x|}{3} - \frac{|x|+4}{5} = \frac{2}{3}$.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$.

γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος.

Λύση

α) $\frac{|x|}{3} - \frac{|x|+4}{5} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 5|x| - 3|x| - 12 = 10 \Leftrightarrow 2|x| = 22 \Leftrightarrow |x| = 11 \Leftrightarrow x = 11 \text{ ή } x = -11$

β) $\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 16$, $x_1 = \frac{-2+4}{2 \cdot (-1)} = \frac{2}{-2} = -1$, $x_2 = \frac{-2-4}{2 \cdot (-1)} = \frac{-6}{-2} = 3$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$-x^2+2x+3$	-	o	+	o	-

Οι λύσεις της ανίσωσης είναι οι τιμές του $x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$

γ) $-11 \in (-\infty, -1]$, $11 \in [3, +\infty)$. Άρα οι αριθμοί -11 και 11 είναι λύσεις της ανίσωσης $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$.

37168. Δίνονται οι ανισώσεις: $-x^2 + 5x - 6 < 0$ (1) και $x^2 - 16 \leq 0$ (2).

α) Να βρεθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1), (2).

β) Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον

άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων.

Λύση

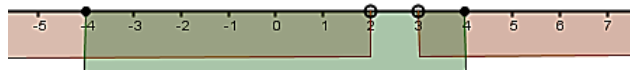
α) $-x^2 + 5x - 6 < 0$ (1) $\Delta = 5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-6) = 25 - 24 = 1$, $x_1 = \frac{-5+1}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4}{-2} = 2$, $x_2 = \frac{-5-1}{2 \cdot (-1)} = \frac{-6}{-2} = 3$

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$-x^2 + 5x - 6$	-	o	+	o	-

Οι λύσεις της ανίσωσης είναι οι τιμές του $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

$x^2 - 16 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 16 \Leftrightarrow |x| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4$.

β)



Οι κοινές λύσεις των ανισώσεων είναι τα διαστήματα $[-4, 2) \cup (3, 4]$.

37182.α) Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 - x - 2 = 0$.

β) Να λυθεί η ανίσωση: $x^2 - x - 2 > 0$ και να παραστήσετε το σύνολο λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

γ) Να τοποθετήσετε το $-\frac{4}{3}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι το $-\frac{4}{3}$ λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 = 3^2$

Οι ρίζες είναι οι αριθμοί $x_1 = \frac{1+3}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$ και $x_2 = \frac{1-3}{2 \cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1$

β)

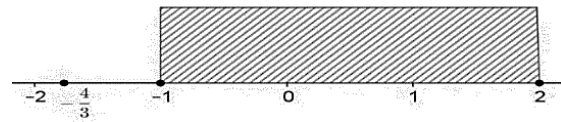
Άρα

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x^2 - x - 2$	+	0	0	+

$x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

γ) $-\frac{4}{3} \notin (-1, 2)$, άρα δεν είναι λύση της ανίσωσης.



38203.α) Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - 25 = 0$.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 36 \leq 0$.

γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του β) ερωτήματος.

Λύση

α) $x^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = \pm 5$.

β) $x^2 - 36 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 36 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} \leq \sqrt{36} \Leftrightarrow |x| \leq 6 \Leftrightarrow -6 \leq x \leq 6$.

γ) Επειδή $-5 \in [-6, 6]$ και $5 \in [-6, 6]$ οι λύσεις της εξίσωσης του α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του β) ερωτήματος.

Θέμα 4ο

13174. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{-x^2 + 4|x| - 3}{|x| - 1}$ και $B = \frac{x^2 - 4|x| + 4}{|x| - 2}$.

α) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζονται οι παραστάσεις A και B;

β) Να δείξετε ότι $A = 3 - |x|$ και $B = |x| - 2$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $B - A < 2d(x, 4) - 5$.

Λύση

α) Η παράσταση A ορίζεται όταν $|x| - 1 \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$.

Η παράσταση B ορίζεται όταν $|x| - 2 \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq 2 \Leftrightarrow x \neq \pm 2$.

$$\beta) A = \frac{-x^2 + 4|x| - 3}{|x| - 1} = -\frac{|x|^2 - 4|x| + 3}{|x| - 1}$$

Το τριώνυμο $\omega^2 - 4\omega + 3$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4$ και ρίζες $\omega_1 = 1, \omega_2 = 3$, οπότε $\omega^2 - 4\omega + 3 = (\omega - 1)(\omega - 3)$, άρα

$$A = -\frac{|x|^2 - 4|x| + 3}{|x| - 1} = -\frac{(|x| - 1)(|x| - 3)}{|x| - 1} = 3 - |x| \text{ και } B = \frac{x^2 - 4|x| + 4}{|x| - 2} = \frac{(|x| - 2)^2}{|x| - 2} = |x| - 2$$

$$\gamma) B - A < 2d(x, 4) - 5 \Leftrightarrow |x| - 2 - (3 - |x|) < 2|x - 4| - 5 \Leftrightarrow$$

$$|x| - 2 - 3 + |x| < 2|x - 4| - 5 \Leftrightarrow 2|x| < 2|x - 4| \Leftrightarrow x^2 < (x - 4)^2 \Leftrightarrow x^2 < x^2 - 8x + 16 \Leftrightarrow 8x < 16 \Leftrightarrow x < 2.$$

Για να έχει νόημα η ανίσωση πρέπει $x \neq \pm 1$ και $x \neq \pm 2$, οπότε τελικά η ανίσωση αληθεύει για $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 2)$

13176. Δίνονται οι ανισώσεις $|x - 1| < 2$ και $x^2 - 3x + 2 \geq 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους.

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (-1, 1] \cup [2, 3)$.

γ) i) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$, είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με $\rho_1, \rho_2 \in (-1, 1]$, είναι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + 3\rho_2}{4}$ κοινή τους λύση;

ii) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$, είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με $\rho_1 \in (-1, 1]$ και $\rho_2 \in [2, 3)$, είναι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + 3\rho_2}{4}$ κοινή τους λύση;

Λύση

$$\alpha) |x - 1| < 2 \Leftrightarrow -2 < x - 1 < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 3$$

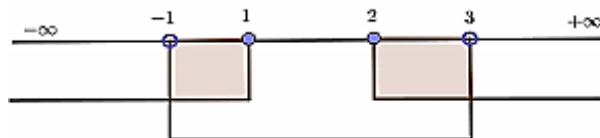
Το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 \text{ και } x_1 = \frac{3 - \sqrt{1}}{2} = 1, x_2 = \frac{3 + \sqrt{1}}{2} = 2$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον διπλανό πίνακα.

Επομένως $x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \text{ ή } x \geq 2$.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$x^2 - 3x + 2$	+	0	-	0	+



β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, προκύπτει ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (-1, 1] \cup [2, 3)$

$$\gamma) \text{ i. } -1 < \rho_1 \leq 1 \text{ (1), } -1 < \rho_2 \leq 1 \Leftrightarrow -3 < 3\rho_2 \leq 3 \text{ (2)}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) προκύπτει ότι

$$-4 < \rho_1 + 3\rho_2 \leq 4 \Leftrightarrow -\frac{4}{4} < \frac{\rho_1 + 3\rho_2}{4} \leq \frac{4}{4} \Leftrightarrow -1 < \frac{\rho_1 + 3\rho_2}{4} \leq 1, \text{ άρα ο αριθμός } \frac{\rho_1 + 3\rho_2}{4} \text{ είναι κοινή λύση των ανισώσεων.}$$

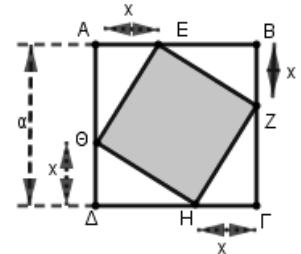
$$\text{ii. } -1 < \rho_1 \leq 1 \text{ (1), } 2 \leq \rho_2 < 3 \Leftrightarrow 6 \leq 3\rho_2 < 9 \text{ (2)}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) προκύπτει ότι

$$-5 < \rho_1 + 3\rho_2 < 10 \Leftrightarrow -\frac{5}{4} < \frac{\rho_1 + 3\rho_2}{4} < \frac{10}{4} \Leftrightarrow -\frac{5}{4} < \frac{\rho_1 + 3\rho_2}{4} < \frac{5}{2}, \text{ άρα ο αριθμός } \frac{\rho_1 + 3\rho_2}{4} \text{ είναι κοινή λύση των ανισώσεων μόνο όταν περιέχεται στην ένωση των διαστημάτων } (-1, 1] \cup \left[2, \frac{5}{2}\right).$$

13368. Στο παρακάτω σχήμα οι κορυφές του τετραγώνου EZHΘ βρίσκονται πάνω στις πλευρές του τετραγώνου ABΓΔ.

α) Αν η πλευρά του τετραγώνου ABΓΔ είναι α και η απόσταση των κορυφών του EZHΘ από τις αντίστοιχες κορυφές του ABΓΔ είναι x, όπως φαίνεται στο σχήμα, να δείξετε ότι το εμβαδόν του EZHΘ δίνεται από τη σχέση: $(EZHΘ) = x^2 + (\alpha - x)^2$ με $0 \leq x \leq \alpha$.



β) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του EZHΘ δεν μπορεί να είναι μικρότερο από το μισό του εμβαδού ABΓΔ.

γ) Να βρείτε την πλευρά α του τετραγώνου ABΓΔ αν για $x=1$, το εμβαδόν του EZHΘ είναι τα δύο τρίτα του εμβαδού του ABΓΔ, δηλαδή: $(EZHΘ) = \frac{2}{3}(ABΓΔ)$. (Δίνεται $\sqrt{3} \approx 1,73$).

Λύση

α) Είναι $(EZHΘ) = (EΘ)^2$. Από πυθαγόρειο θεώρημα είναι $(EΘ)^2 = (AE)^2 + (AΘ)^2 = x^2 + (\alpha - x)^2$.

$$\text{Πρέπει } \begin{cases} (AE) > 0 \\ (AΘ) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \alpha - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq \alpha \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \alpha \text{ άρα } (EZHΘ) = x^2 + (\alpha - x)^2, 0 \leq x \leq \alpha.$$

$$\text{β) } (EZHΘ) \geq \frac{(ABΓΔ)}{2} \Leftrightarrow x^2 + (\alpha - x)^2 \geq \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 2(\alpha - x)^2 \geq \alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2\alpha^2 - 4\alpha x + 2x^2 \geq \alpha^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 4\alpha x + \alpha^2 \geq 0 \Leftrightarrow (2x - \alpha)^2 \geq 0 \text{ πράγμα που ισχύει.}$$

$$\text{γ) Για } x=1 \text{ είναι } (EZHΘ) = 1^2 + (\alpha - 1)^2 = 1 + \alpha^2 - 2\alpha + 1 = \alpha^2 - 2\alpha + 2$$

$$\text{Είναι } (EZHΘ) = \frac{2(ABΓΔ)}{3} \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 2 = \frac{2\alpha^2}{3} \Leftrightarrow 3\alpha^2 - 6\alpha + 6 = 2\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2 - 6\alpha + 6 = 0$$

$$\text{Η εξίσωση έχει διακρίνουσα } \Delta = 12 \text{ και ρίζες } \alpha_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 3 \pm \sqrt{3}$$

Πρέπει $0 \leq x \leq \alpha$ άρα για $x=1$ πρέπει $1 \leq \alpha$.

Αν $\alpha = 3 + \sqrt{3}$ τότε προφανώς $\alpha > 1$ και είναι δεκτή τιμή.

Αν $\alpha = 3 - \sqrt{3} \approx 1,27$ άρα $\alpha > 1$ επομένως κι αυτή δεκτή τιμή. Διαφορετικά μπορούμε να υποθέσουμε ότι $3 - \sqrt{3} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{3} < 2 \Leftrightarrow 3 < 4$ ισχύει. (Δεν χρησιμοποιούμε την προσέγγιση που δίνεται).

14123. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - ax - (\alpha + 1)$, $x \in \mathbb{R}$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου α να βρείτε το πλήθος των ριζών του τριωνύμου.

β) Αν είναι $\alpha > -2$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι αριθμοί -1 και $\alpha + 1$.

ii. Να βρείτε την τιμή του α για την οποία το μήκος του διαστήματος λύσεων της ανίσωσης $x^2 - ax - (\alpha + 1) \leq 0$ είναι ίσο με 2024.

iii. Να βρείτε το πρόσημο του $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

Λύση

α) Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = \alpha^2 + 4(\alpha + 1) = \alpha^2 + 4\alpha + 4 = (\alpha + 2)^2 \geq 0$

Αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow (\alpha + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -2$ τότε η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα. Αν

$\Delta > 0 \Leftrightarrow (\alpha + 2)^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha + 2 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq -2$ τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες.

β) i) Αφού $\alpha > -2$ είναι $\Delta > 0$ και έχει ρίζες $x_{1,2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{(\alpha + 2)^2}}{2} = \frac{\alpha \pm (\alpha + 2)}{2} = \begin{cases} \frac{2\alpha + 2}{2} = \alpha + 1 \\ \frac{\alpha - \alpha - 2}{2} = -1 \end{cases}$

ii) Είναι $\alpha > -2 \Leftrightarrow \alpha + 1 > -1$. Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-1	$\alpha + 1$	$+\infty$
$x^2 - \alpha x - (\alpha + 1)$	+	•	•	+

Άρα $x^2 - \alpha x - (\alpha + 1) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, \alpha + 1]$

Το διάστημα $[-1, \alpha + 1]$ έχει διάστημα $\alpha + 1 - (-1) = \alpha + 2$ άρα πρέπει $\alpha + 2 = 2024 \Leftrightarrow \alpha = 2022$.

iii) Είναι $\alpha > -2 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} > -1$ και $\frac{\alpha}{2} < \alpha$ άρα $\frac{\alpha}{2} < \alpha + 1$. Επομένως $-1 < \frac{\alpha}{2} < \alpha + 1$ και $f\left(\frac{\alpha}{2}\right) < 0$.

14615. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση έχει, για οποιαδήποτε τιμή του λ , πραγματικές και άνισες ρίζες.

β) Να λύσετε την εξίσωση.

Έστω ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης με $\rho_1 < \rho_2$.

γ) Να βρείτε για ποιες της παραμέτρου λ , η απόσταση των αριθμών ρ_2 και $-\rho_1$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, είναι τουλάχιστον 8.

δ) Θεωρούμε έναν αριθμό k ώστε $\rho_1 < k < \rho_2$. Να βρείτε, με απόδειξη, το πρόσημο του αριθμού $k^2 - 2\lambda k + \lambda^2 - 1$.

Λύση

α) Είναι $\Delta = (-2\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda^2 - 1) = 4\lambda^2 - 4\lambda^2 + 4 = 4 > 0$, άρα η εξίσωση έχει δυο πραγματικές και άνισες ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Οι ρίζες της εξίσωσης είναι: $x_1 = \frac{2\lambda + 2}{2} = \frac{\cancel{2}(\lambda + 1)}{\cancel{2}} = \lambda + 1$ και $x_2 = \frac{2\lambda - 2}{2} = \frac{\cancel{2}(\lambda - 1)}{\cancel{2}} = \lambda - 1$

γ) Είναι $\rho_1 = \lambda - 1$ και $\rho_2 = \lambda + 1$.

$$|\rho_2 - (-\rho_1)| \geq 8 \Leftrightarrow |\rho_1 + \rho_2| \geq 8 \Leftrightarrow |\lambda - 1 + \lambda + 1| \geq 8 \Leftrightarrow |2\lambda| \geq 8 \Leftrightarrow 2|\lambda| \geq 8 \Leftrightarrow |\lambda| \geq 4 \Leftrightarrow \lambda \leq -4 \text{ ή } \lambda \geq 4$$

δ) Στον διπλανό πίνακα προσήμων βλέπουμε ότι για κάθε $\rho_1 < x < \rho_2$ είναι $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1 < 0$.

x	$-\infty$	ρ_1	ρ_2	$+\infty$
$x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1$	+	•	•	+

Επειδή $\rho_1 < k < \rho_2$, είναι $k^2 - 2\lambda k + \lambda^2 - 1 < 0$

14652. α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 > x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $\alpha > 1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς: $0, 1, \alpha, \alpha^2, \sqrt{\alpha}$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

ii) Να κάνετε το ίδιο για τους αριθμούς: $\alpha, \alpha^2, \frac{\alpha + \alpha^2}{2}$.

Λύση

α) $x^2 > x \Leftrightarrow x^2 - x > 0$

Οι ρίζες είναι οι αριθμοί $0, 1$.

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον πίνακα

Οι λύσεις της ανίσωσης $x^2 > x$ είναι η ένωση των διαστημάτων: $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x^2 - x$	+	0	-	+

β)i. $0 < 1 < \sqrt{\alpha} < \alpha < \alpha^2$, αφού: $\alpha > 1 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} > 1$ και από (α) ερώτημα είναι

$$\alpha < \alpha^2 \Leftrightarrow (\sqrt{\alpha})^2 < \alpha^2 \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} \sqrt{\alpha} < \alpha$$

ii. $\alpha < \frac{\alpha + \alpha^2}{2} < \alpha^2$, αφού: $\alpha < \frac{\alpha + \alpha^2}{2} \Leftrightarrow 2\alpha < \alpha + \alpha^2 \Leftrightarrow \alpha < \alpha^2$ ισχύει από (α) ερώτημα

$$\frac{\alpha + \alpha^2}{2} < \alpha^2 \Leftrightarrow \alpha + \alpha^2 < 2\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha < \alpha^2 \text{ ισχύει από (α)}$$

14653. Δίνεται η ανίσωση: $|x - 1| \leq 3$. (1)

α) Να λύσετε την ανίσωση (1).

β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1).

γ) Να βρείτε μία ανίσωση 2ου βαθμού που να έχει τις ίδιες ακριβώς λύσεις με την (1).

δ) Να δείξετε ότι αν το τετράγωνο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 8 δεν ξεπερνάει το διπλάσιό του, τότε η απόσταση του από το 1 δεν ξεπερνάει το 3.

Λύση

α) $|x - 1| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x - 1 \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow x \in [-2, 4]$

β) Οι ακέραιοι που βρίσκονται στο διάστημα $[-2, 4]$ είναι οι $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$.

γ) Αναζητούμε ένα τριώνυμο με ρίζες -2 και 4 του οποίου το πρόσημο να είναι ετερόσημο του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου. Το άθροισμα των ριζών είναι $S = -2 + 4 = 2$, το γινόμενο των ριζών είναι $P = -2 \cdot 4 = -8$, οπότε ένα τριώνυμο είναι το $x^2 - Sx + P = x^2 - 2x - 8$ και αφού θέλουμε το πρόσημο του να είναι ετερόσημο του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου, δηλαδή αρνητικό, έχουμε τελικά ότι η ζητούμενη ανίσωση είναι $x^2 - 2x - 8 \leq 0$.

δ) Έστω λοιπόν ένας αριθμός x του οποίου το τετράγωνο ελαττωμένο κατά 8 δεν ξεπερνάει το διπλάσιό του, δηλαδή $x^2 - 8 \leq 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 \leq 0$. Τότε όπως δείξαμε στο γ) ερώτημα για αυτόν τον αριθμό x θα ισχύει ισοδύναμα ότι $|x - 1| \leq 3$, δηλαδή η απόσταση του από το 1 δεν ξεπερνάει το 3.

14654.α) Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου.

β) Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς α, β διαφορετικούς από το 0 με $\alpha < \beta$ για τους οποίους ισχύει $(\alpha^2 - 3\alpha + 2)(\beta^2 - 3\beta + 2) < 0$.

i) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha - 1$ και $\beta - 2$ είναι ομόσημοι.

ii) Να δείξετε ότι $|(\alpha - 1)(\beta - 2)| = (\alpha - 1)(\beta - 2)$.

Λύση

α) Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1$ και

ρίζες $x_1 = \frac{3-1}{2} = 1$, $x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$. Το πρόσημό του

φαίνεται στον διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$x^2 - 3x + 2$	+	0	-	0	+

β) i. Είναι $(\alpha^2 - 3\alpha + 2)(\beta^2 - 3\beta + 2) < 0$, όταν οι αριθμοί $\alpha^2 - 3\alpha + 2$ και $\beta^2 - 3\beta + 2$ είναι ετερόσημοι.

Αν $\alpha^2 - 3\alpha + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < \alpha < 2$ και $\beta^2 - 3\beta + 2 > 0 \Leftrightarrow \beta < 1$ ή $\beta > 2$

Τότε $\alpha - 1 > 0$ και $\beta - 2 > 0$ ($\alpha < \beta$). Επομένως $(\alpha - 1)(\beta - 2) > 0 \Rightarrow |(\alpha - 1)(\beta - 2)| = (\alpha - 1)(\beta - 2)$

Αν $\alpha^2 - 3\alpha + 2 > 0 \Leftrightarrow \alpha < 1$ ή $\alpha > 2$ και $\beta^2 - 3\beta + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < \beta < 2$, τότε

$\alpha - 1 < 0$ ($\alpha < \beta$) και $\beta - 2 < 0$ ($\alpha < \beta$).

Επομένως οι αριθμοί $\alpha - 1$ και $\beta - 2$ είναι ομόσημοι.

ii. Επειδή οι αριθμοί $\alpha - 1$ και $\beta - 2$ είναι ομόσημοι, ισχύει ότι $(\alpha - 1)(\beta - 2) > 0$, οπότε

$|(\alpha - 1)(\beta - 2)| = (\alpha - 1)(\beta - 2)$.

14924. α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - x - 12$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι $\left(\frac{\pi+9}{3}\right)^2 - \left(\frac{\pi+9}{3}\right) - 12 > 0$, όπου $\pi = 3,1415\dots$

γ) Αν για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι $(|\alpha|+3)^2 - (|\alpha|+3) - 12 < 0$ να δείξετε ότι $\alpha \in (-1,1)$.

Λύση

α) Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 49$ και ρίζες $x_1 = \frac{1-7}{2} = -3$, $x_2 = \frac{1+7}{2} = 4$.

Για κάθε $x \in (-\infty, -3) \cup (4, +\infty)$ είναι $x^2 - x - 12 > 0$

και για κάθε $x \in (-3, 4)$ είναι $x^2 - x - 12 < 0$

x	$-\infty$	-3	4	$+\infty$	
x^2-x-12	+	0	-	0	+

β) Είναι $\frac{\pi+9}{3} > 4$ γιατί $\pi+9 > 12 \Leftrightarrow \pi > 3$, οπότε με βάση το προηγούμενο πρόσημο είναι

$$\left(\frac{\pi+9}{3}\right)^2 - \left(\frac{\pi+9}{3}\right) - 12 > 0$$

γ) Η παράσταση $(|\alpha|+3)^2 - (|\alpha|+3) - 12 < 0$ είναι η αριθμητική τιμή του τριωνύμου $x^2 - x - 12$ για

$x = |\alpha| + 3$. Επειδή για κάθε $x \in (-3, 4)$ είναι $x^2 - x - 12 < 0$, ισχύει ότι

$$-3 < |\alpha| + 3 < 4 \Leftrightarrow -6 < |\alpha| < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |\alpha| > -6 \text{ ισχύει} \\ |\alpha| < 1 \Leftrightarrow -1 < \alpha < 1 \end{cases}$$

14963. Δίνεται η εξίσωση $|x-4|-|x-2|=2$.

α) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της παραπάνω εξίσωσης.

β) Να αιτιολογήσετε γεωμετρικά ότι οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που ανήκουν στο $(-\infty, 2]$ και μόνο αυτοί.

γ) Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει ότι $|x-4|-|x-2|=2$, τότε να δείξετε ότι $x^2-6x+8 \geq 0$.

Λύση

α) Η διαφορά των αποστάσεων του x από το 4 και το 2 είναι ίση με 2.

β) Έστω ότι τα σημεία M, A, B αναπαριστούν στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς $x, 2, 4$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Παρατηρούμε ότι $d(2,4) = (AB)=2$, οπότε: $|x-4|-|x-2|=2 \Leftrightarrow$

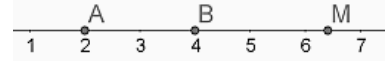
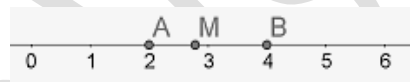
$$d(x,4) = d(x,2) + (AB) \Leftrightarrow (MB) = (MA) + (AB).$$

Αν $x \leq 2$ τότε $(MB) = (MA) + (AB)$.

Αν $2 < x \leq 4$, τότε $(MB) = (AB) - (MA)$

Αν $x > 4$ τότε $(MB) = (MA) - (AB)$.

Τελικά η σχέση $d(x,4) = d(x,2) + (AB) \Leftrightarrow (MB) = (MA) + (AB)$, ισχύει μόνο όταν $x \leq 2$.



γ) Το τριώνυμο $x^2 - 6x + 8$ έχει ρίζες τα 2, 4 και γράφεται $x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$.

Είναι $x \leq 2 \Leftrightarrow x-2 \leq 0$ και $x-4 < -2 < 0$, άρα $x^2 - 6x + 8 \geq 0$.

32682.α) i. Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $|x+3| + |x^2 + 9x + 18| = 0$.

β) i. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$, για τις διάφορες τιμές του αριθμού x .

ii. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει: $|x^2 + 9x + 18| = -x^2 - 9x - 18$.

Λύση

α) i) $\Delta = 9^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = 81 - 72 = 9$. Οι ρίζες του τριωνύμου είναι :

$$x_1 = \frac{-9+3}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \text{ και } x_2 = \frac{-9-3}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

ii) $|x+3| + |x^2 + 9x + 18| = 0 \Leftrightarrow x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$ και $x^2 + 9x + 18 \Leftrightarrow x=-3$ ή -6

β) i) Το πρόσημο του τριωνύμου δίνεται από τον πίνακα :

x	$-\infty$	-6	-3	$+\infty$
$x^2+9x+18$	+	○	○	+

ii) Για να ισχύει: $|x^2 + 9x + 18| = -x^2 - 9x - 18$ πρέπει $x^2 + 9x + 18 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-6, -3]$.

33587. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου f για τις διάφορες τιμές του x .

β) Να προσδιορίσετε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου:
 $f(2,999) \cdot f(-1,002)$.

γ) Αν $-3 < \alpha < 3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού: $-\alpha^2 + 2|\alpha| + 3$.

Λύση

α) $\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 4 + 12 = 16 = 4^2$. Οι ρίζες του τριωνύμου $f(x)$ είναι: $x_1 = \frac{-2+4}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$ και

$$x_2 = \frac{-2-4}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

Το πρόσημο του τριωνύμου δίνεται από τον πίνακα :

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$-x^2 + 2x + 3$	-	ο	ο	-

β) Είναι $-1 < 2,999 < 3$, άρα $f(2,999) > 0$ και $-1,002 \in (-\infty, -1)$.

Άρα $f(-1,002) < 0$ (όπως φαίνεται από τον πίνακα προσήμων). Επομένως $f(2,999) \cdot f(-1,002) < 0$.

γ) $-3 < \alpha < 3 \Leftrightarrow |\alpha| < 3$. Άρα $0 \leq |\alpha| < 3$

Από την παράσταση $-\alpha^2 + 2|\alpha| + 3 = -|\alpha|^2 + 2|\alpha| + 3$ για $|\alpha| = x$ προκύπτει το αρχικό τριώνυμο, το οποίο για $0 \leq x < 3$ είναι αρνητικό. Επομένως το ίδιο συμβαίνει για την παράσταση $-\alpha^2 + 2|\alpha| + 3$.

33711. Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 2x - 8$

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x .

β) Αν $k = -\frac{8889}{4444}$, είναι η τιμή της παράστασης: $k^2 - 2k - 8$ μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Αν ισχύει $-4 < \mu < 4$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο της τιμής της παράστασης:
 $\mu^2 - 2|\mu| - 8$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) Οι ρίζες είναι οι αριθμοί -2,4.

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον πίνακα

x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$
$x^2 - 2x - 8$	+	ο	ο	+

β) $k = -\frac{8889}{4444} < -2 \Leftrightarrow 8889 > 8888$ ισχύει. Άρα $k^2 - 2k - 8 > 0$ από τον πίνακα προσήμων.

γ) $-4 < \mu < 4 \Leftrightarrow |\mu| < 4$. Άρα $0 < |\mu| < 4$.

Από την παράσταση $\mu^2 - 2|\mu| - 8 = |\mu|^2 - 2|\mu| - 8$ για $|\mu| = x$ προκύπτει το αρχικό τριώνυμο, το οποίο για $0 < x < 4$ είναι αρνητικό. Επομένως το ίδιο συμβαίνει για την παράσταση $\mu^2 - 2|\mu| - 8$.

33712. Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 + \beta x + \beta^2$, όπου $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα του τριωνύμου.

β) i) Αν $\beta \neq 0$ τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο του τριωνύμου;

ii) Πώς αλλάζει η απάντησή σας στο ερώτημα (i), όταν $\beta = 0$.

γ) Με τη βοήθεια της απάντησής στο ερώτημα (β), να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0$ για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα 0.

Λύση

α) $\Delta = \beta^2 - 4\beta^2 = -3\beta^2$

β) i) Αν $\beta \neq 0$ τότε $\Delta < 0$. Επομένως $x^2 + \beta x + \beta^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii) Όταν $\beta = 0$ τότε το τριώνυμο γίνεται $x^2 + \beta x + \beta^2 = x^2$ και $x^2 > 0$ για κάθε $x \neq 0$.

γ) Αν $\alpha \neq 0$ τότε το τριώνυμο ως προς β : $\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2 > 0$ από (β(i) ερώτημα). Αν $\beta \neq 0$ τότε το τριώνυμο ως προς β : $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0$ από (β(i) ερώτημα). Άρα η ανισότητα $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0$ ισχύει για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα 0.

33698. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 6x + \lambda - 3$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

γ) Αν $3 < \lambda < 12$, τότε:

i) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες.

ii) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ, μ είναι δύο αριθμοί με $\kappa < 0$ και $x_1 < \mu < x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - 3) = 36 - 4\lambda + 12 = 48 - 4\lambda$.

β) Θα πρέπει $\Delta > 0 \Leftrightarrow 48 - 4\lambda > 0 \Leftrightarrow 4\lambda < 48 \Leftrightarrow \lambda < 12$.

γ) i) Επειδή $\lambda < 12$ έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

$P = x_1 \cdot x_2 = \lambda - 3 > 0$. Άρα έχει ρίζες ομόσημες. $S = x_1 + x_2 = 6 > 0$. Άρα έχει ρίζες θετικές.

ii)

x	$-\infty$	κ	x_1	μ	x_2	$+\infty$
f(x)		+	○	-	○	+

Έχουμε: $\kappa < 0, \mu > x_1 > 0$ ($x_1 > 0$, από γ)i) ερώτημα)

Από τον πίνακα προσήμου έχουμε $f(\kappa) > 0, f(\mu) < 0$.

Άρα $\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu) > 0$

33890.α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + 1 \geq \frac{5}{2}x$ (1)

β) Δίνονται δύο αριθμοί κ, λ οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ικανοποιούν επιπλέον τη σχέση: $(\lambda - 1)(\kappa - 1) < 0$.

i) Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των κ, λ . **ii)** Να δείξετε ότι: $|\kappa - \lambda| \geq \frac{3}{2}$.

Λύση

α) $x^2 + 1 \geq \frac{5}{2}x \Leftrightarrow 2x^2 + 2 \geq 5x \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 \geq 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9 = 3^2$

Οι ρίζες του τριωνύμου $f(x)$ είναι: $x_1 = \frac{5+3}{2 \cdot 2} = \frac{8}{4} = 2$ και $x_2 = \frac{5-3}{2 \cdot 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Το πρόσημο του τριωνύμου δίνεται από τον πίνακα:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$	
$2x^2 - 5x + 2$	+	$\circ$	$-$	$\circ$	+

Οι λύσεις της ανίσωσης είναι: $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup [2, +\infty)$

β) i) Επειδή $(\lambda - 1)(\kappa - 1) < 0$, οι αριθμοί $\lambda - 1, \kappa - 1$ είναι ετερόσημοι.

Έστω $\lambda - 1 < 0 \Leftrightarrow \lambda < 1$ και $\kappa - 1 > 0 \Leftrightarrow \kappa > 1$. Τότε $\lambda < 1 < \kappa$.

Αν $\lambda - 1 > 0 \Leftrightarrow \lambda > 1$ και $\kappa - 1 < 0 \Leftrightarrow \kappa < 1$. Τότε $\kappa < 1 < \lambda$, άρα σε κάθε περίπτωση το 1 είναι μεταξύ των κ, λ .

ii) Αν $\lambda < 1 < \kappa$ και κ, λ λύσεις της ανίσωσης τότε: $\lambda \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\lambda \geq -\frac{1}{2}$ (1) και $\kappa \geq 2$ (2). Με πρόσθεση των (1) και (2) έχουμε: $\kappa - \lambda \geq -\frac{1}{2} + 2 \Leftrightarrow \kappa - \lambda \geq \frac{3}{2}$.

Αν $\kappa < 1 < \lambda$ και κ, λ λύσεις της ανίσωσης τότε: $\kappa \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\kappa \geq -\frac{1}{2}$ (1) και $\lambda \geq 2$ (2). Με πρόσθεση των (1) και (2) έχουμε:

$\lambda - \kappa \geq -\frac{1}{2} + 2 \Leftrightarrow \lambda - \kappa \geq \frac{3}{2}$. Άρα σε κάθε περίπτωση έχουμε $|\kappa - \lambda| \geq \frac{3}{2}$

33892. α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + x - 6 < 0$.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $\left|x - \frac{1}{2}\right| > 1$

γ) Δίνεται το διπλανό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές a και $a + 1$ όπου ο αριθμός a ικανοποιεί τη σχέση $\left|a - \frac{1}{2}\right| > 1$. Αν για το εμβαδόν E του ορθογωνίου ισχύει $E < 6$, τότε:



i) Να δείξετε ότι: $\frac{3}{2} < a < 2$

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών κυμαίνεται η περίμετρος του ορθογωνίου.

Λύση

α) Οι ρίζες είναι οι αριθμοί -3 και 2

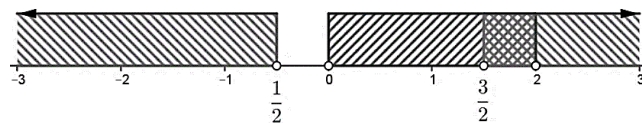
x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$x^2 - x - 6$	+	○	○	+

Η λύση της ανίσωσης είναι το διάστημα $(-3, 2)$

$$\beta) \left| x - \frac{1}{2} \right| > 1 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2} > 1 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2} \right) \text{ ή } \left(x - \frac{1}{2} < -1 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2} \right). \text{ Άρα } x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2} \right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty \right)$$

γ) i) Το εμβαδόν του ορθογωνίου δίνεται από τον τύπο $E = \alpha(\alpha + 1) = \alpha^2 + \alpha$

Άρα $E < 6 \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha < 6 \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha - 6 < 0 \Leftrightarrow \alpha \in (-3, 2)$ (αερώτημα). Επειδή $\alpha > 0$ είναι $\alpha \in (0, 2)$



$$\text{Επίσης } \left| \alpha - \frac{1}{2} \right| > 1 \Leftrightarrow \alpha \in \left(-\infty, -\frac{1}{2} \right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty \right). \text{ Άρα } \frac{3}{2} < \alpha < 2$$

ii) Έστω Π η περίμετρος του ορθογωνίου. Τότε $\Pi = 2\alpha + 2(\alpha + 1) = 2\alpha + 2\alpha + 2 = 4\alpha + 2$

$$\text{Έχουμε } \frac{3}{2} < \alpha < 2 \Leftrightarrow 6 < 4\alpha < 8 \Leftrightarrow 8 < 4\alpha + 2 < 10 \Leftrightarrow 8 < \Pi < 10$$

34319. Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + \kappa x - 4$, με παράμετρο $\kappa \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του κ , το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου και α, β δυο πραγματικοί

αριθμοί ώστε να ισχύει $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου:

$\alpha \cdot f(\alpha) \cdot \beta \cdot f(\beta)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) $\Delta = \kappa^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = \kappa^2 + 48 > 0$. Άρα το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) $P = x_1 \cdot x_2 = -\frac{4}{3} < 0$. Άρα έχει ρίζες ετερόσημες

$$\gamma)$$

x	$-\infty$	α	x_1	x_2	β	$+\infty$
$3x^2 + \kappa x - 4$	+	+	○	○	+	+

Έχουμε: $\alpha < x_1 < 0, \beta > x_2 > 0$ ($x_1 < 0, x_2 > 0$ από β ερώτημα)

Από τον πίνακα προσήμου έχουμε $f(\alpha) > 0, f(\beta) > 0$.

Άρα $\alpha \cdot f(\alpha) \cdot \beta \cdot f(\beta) < 0$

34323. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - x + (\lambda - \lambda^2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες;

γ) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1 < x_2$, τότε :

i) να αποδείξετε ότι $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2$

ii) να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς

$$f(x_2), f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), f(x_2 + 1).$$

Λύση

α) $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - \lambda^2) = 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (1 - 2\lambda)^2 \geq 0.$

Αρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Θα πρέπει $\Delta = 0 \Leftrightarrow (1 - 2\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$

γ) i) $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2 \stackrel{(\cdot 2)}{\Leftrightarrow} 2x_1 < x_1 + x_2 < 2x_2$

$2x_1 < x_1 + x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$ ισχύει

$x_1 + x_2 < 2x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$ ισχύει

ii) Επειδή $a = 1 > 0$ το πρόσημο του τριωνύμου είναι:

x	$-\infty$	x_1	$\frac{x_1 + x_2}{2}$	x_2	$x_2 + 1$	$+\infty$
$x^2 + \beta x + \gamma$	+	-	-	-	+	+

Επομένως $f(x_1) = 0$, $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < 0$, $f(x_2 + 1) > 0$.

Αρα $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < f(x_2) < f(x_2 + 1)$

34325. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $0 < d(x_1, x_2) < 2$.

Λύση

α) $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - \lambda^2) = 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (1 - 2\lambda)^2 \geq 0.$

Αρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Θα πρέπει $\Delta = 0 \Leftrightarrow (1 - 2\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$

γ) Από τις σχέσεις Vietta έχουμε $S = x_1 + x_2 = 1$, $P = x_1 \cdot x_2 = \lambda - \lambda^2$

$$d(x_1, x_2) > 0 \Leftrightarrow |x_1 - x_2| > 0 \Leftrightarrow x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow \lambda \neq \frac{1}{2} \text{ (βερώτημα) } (1)$$

$$d(x_1, x_2) < 2 \Leftrightarrow |x_1 - x_2| < 2 \Leftrightarrow |x_1 - x_2|^2 < 4 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 < 4 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 < 4 \Leftrightarrow$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 < 4 \Leftrightarrow 1 - 4(\lambda - \lambda^2) < 4 \Leftrightarrow 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 4\lambda - 3 < 0$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $4\lambda^2 - 4\lambda - 3$ είναι:

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3) = 16 + 48 = 64 = 8^2 \text{ και οι ρίζες του } x_1 = \frac{4+8}{2 \cdot 4} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \text{ και } x_2 = \frac{4-8}{2 \cdot 4} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον πίνακα

λ	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$4\lambda^2 - 4\lambda - 3$	+	$\circ$	$\circ$	+

Οι λύσεις της ανίσωσης $4\lambda^2 - 4\lambda - 3 < 0$ είναι το διάστημα: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ Επειδή $\lambda \neq \frac{1}{2}$ οι τιμές του λ για τις

οποίες ισχύει $0 < d(x_1, x_2) < 2$ είναι οι $\lambda \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

34185.α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 5x - 6 < 0$.

β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $K = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 + 5\frac{46}{47} - 6$ και να αιτιολογήσετε το

συλλογισμό σας.

γ) Αν $\alpha \in (-6, 6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda = \alpha^2 - 5|\alpha| - 6$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 + 24 = 49 = 7^2$

Οι ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 5x - 6$ είναι: $x_1 = \frac{5+7}{2} = \frac{12}{2} = 6$ και

$x_2 = \frac{5-7}{2} = \frac{-2}{2} = -1$. Το πρόσημο του τριωνύμου δίνεται από τον πίνακα

x	$-\infty$	-1	6	$+\infty$	
$x^2 - 5x - 6$	+	o	-	o	+

Οι λύσεις της ανίσωσης είναι: $x \in (-1, 6)$

β) $-\frac{46}{47} > -1 \Leftrightarrow 46 < 47$ και $-\frac{46}{47} < 6$. Ο αριθμός $K = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 + 5\frac{46}{47} - 6$ είναι η τιμή του τριωνύμου

$x^2 - 5x - 6$ για $x = -\frac{46}{47}$. Άρα $K < 0$.

γ) $\alpha \in (-6, 6) \Leftrightarrow -6 < \alpha < 6 \Leftrightarrow |\alpha| < 6$. Άρα $0 \leq |\alpha| < 6$

Από την παράσταση $\alpha^2 - 5|\alpha| - 6 = | \alpha |^2 - 5|\alpha| - 6$ για $|\alpha| = x$ προκύπτει το αρχικό τριώνυμο, το οποίο για $0 \leq x < 6$ είναι αρνητικό. Επομένως το ίδιο συμβαίνει για την παράσταση Λ .

34186. Οι πλευρές x_1 και x_2 ενός ορθογωνίου είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2x + \lambda(2 - \lambda) = 0$, με $\lambda \in (0, 2)$.

α) Να βρείτε

- i. την περίμετρο Π του ορθογωνίου.
- ii. το εμβαδόν E του ορθογωνίου ως συνάρτηση του λ .

β) Να δείξετε ότι $E \leq 1$, για κάθε $\lambda \in (0, 2)$.

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in (0, 2)$ για την οποία το εμβαδόν E του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1. Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

Λύση

α) i) Είναι $S = x_1 + x_2 = -\frac{-2}{1} = 2$ και η περίμετρος είναι $\Pi = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 4$

ii) Είναι $P = x_1 x_2 = \frac{\lambda(2 - \lambda)}{1} = -\lambda^2 + 2\lambda$ και το εμβαδόν $E = x_1 x_2 = -\lambda^2 + 2\lambda$ με $\lambda \in (0, 2)$.

β) $E \leq 1 \Leftrightarrow -\lambda^2 + 2\lambda \leq 1 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 \geq 0$ ισχύει για κάθε $\lambda \in (0, 2)$.

γ) Είναι $E = 1 \Leftrightarrow -\lambda^2 + 2\lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$

Για $\lambda = 1$ αφού $x_1 + x_2 = 2$ και $x_1 x_2 = 1$ τότε είναι λύσεις της εξίσωσης

$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (διπλή ρίζα) άρα το ορθογώνιο είναι τετράγωνο με πλευρά 1.

36658. Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος y (σε m) στο οποίο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή t (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από τη σχέση: $y = 60t - 5t^2$.

α) Μετά από πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος;

β) Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί στο ύψος $y = 175$ m;

γ) Να βρεθεί το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100 m.

Λύση

α) Η σφαίρα βρίσκεται στο έδαφος όταν $y = 0$

$$60t - 5t^2 = 0 \Leftrightarrow 5t(12 - t) = 0 \Leftrightarrow (5t = 0 \Leftrightarrow t = 0) \text{ ή } (12 - t = 0 \Leftrightarrow t = 12).$$

Μετά από 12 sec θα ξαναβρεθεί η σφαίρα στο έδαφος.

$$\text{β) } y = 175 \Leftrightarrow 60t - 5t^2 = 175 \Leftrightarrow 0 = 5t^2 - 60t + 175 \Leftrightarrow t^2 - 12t + 35 = 0$$

γ) Η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100m όταν

$$y > 100 \Leftrightarrow 60t - 5t^2 > 100 \Leftrightarrow 0 > 5t^2 - 60t + 100 \Leftrightarrow t^2 - 12t + 20 < 0$$

Το τριώνυμο $t^2 - 12t + 20$ έχει $\Delta = 64$ και ρίζες $t = 2$ ή $t = 10$

Με βάση τον πίνακα προσήμων είναι

$$t^2 - 12t + 20 < 0 \Leftrightarrow t \in (2, 10).$$

t	0	2	10	$+\infty$	
$t^2-12t+20$	+	0	-	0	+

36669. Δίνονται οι ανισώσεις: $2 \leq |x| \leq 3$ και $x^2 - 4x < 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους.

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [2, 3]$.

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

Λύση

α) $2 \leq |x| \leq 3$ (1)

Για $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$ και (1) $\Rightarrow 2 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow x \in [2, 3]$

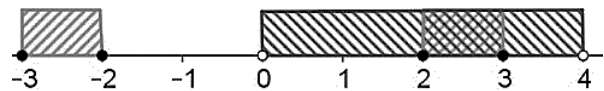
Για $x \leq 0 \Rightarrow |x| = -x$ και (1) $\Rightarrow 2 \leq -x \leq 3 \Leftrightarrow -2 \geq x \geq -3 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq -2 \Leftrightarrow x \in [-3, -2]$

Άρα $x \in [-3, -2] \cup [2, 3]$. $x^2 - 4x < 0 \Leftrightarrow x(x - 4) < 0$ (2). Οι ρίζες είναι οι αριθμοί 0 και 4

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
$x^2 - 4x$	+	0	-	+

Οι λύσεις της ανίσωσης είναι το διάστημα (0,4)

β) Όπως φαίνεται από τον άξονα οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [2, 3]$.



γ) Επειδή οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, είναι

$2 < \rho_1 \leq 3$, $2 < \rho_2 \leq 3$, άρα και $4 < \rho_1 + \rho_2 \leq 6 \Leftrightarrow 2 < \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \leq 3$. Δηλαδή ο αριθμός $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ βρίσκεται στο διάστημα κοινών λύσεων, άρα είναι κοινή τους λύση.

36670. Δίνονται οι ανισώσεις: $|x + 1| \leq 2$ και $x^2 - x - 2 > 0$.

α) Να λύσετε τις ανισώσεις.

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [-3, -1]$.

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι: $\rho_1 - \rho_2 \in (-2, 2)$.

Λύση

α) $|x + 1| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x + 1 \leq 2 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-3, 1]$

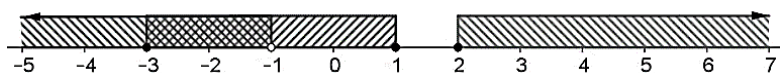
Για την $x^2 - x - 2 > 0$, έχουμε: $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 = 3^2$

Οι ρίζες είναι οι αριθμοί $x_1 = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$ και $x_2 = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x^2 - x - 2$	+	0	-	+

Οι λύσεις της ανίσωσης $x^2 - x - 2 > 0$ είναι $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

β) Όπως φαίνεται από τον άξονα οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [-3, -1]$



γ) Επειδή οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, είναι $-3 \leq \rho_1 < -1$, $-3 \leq \rho_2 < -1 \Leftrightarrow 3 \geq -\rho_2 > 1 \Leftrightarrow 1 < -\rho_2 \leq 3$, άρα και $-2 < \rho_1 - \rho_2 < 2 \Leftrightarrow \rho_1 - \rho_2 \in (-2, 2)$

36678. α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 < x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $0 < \alpha < 1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς: $0, 1, \alpha, \alpha^2, \sqrt{\alpha}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α).

ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα: $\sqrt{1+\alpha} < 1 + \sqrt{\alpha}$.

Λύση

α) $x^2 < x \Leftrightarrow x^2 - x < 0 \Leftrightarrow x(x-1) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

β) i) $0 < \alpha^2 < \alpha < \sqrt{\alpha} < 1$. Αφού: $\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 > 0$

$\alpha^2 < \alpha$ από (α) ερώτημα ($0 < \alpha < 1$)

$\alpha = (\sqrt{\alpha})^2$ άρα $\alpha^2 < \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 < (\sqrt{\alpha})^2 \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} \alpha < \sqrt{\alpha}$ και $\alpha < 1 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} < 1$

ii) $\sqrt{1+\alpha} < 1 + \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow (\sqrt{1+\alpha})^2 < (1 + \sqrt{\alpha})^2 \Leftrightarrow 1 + \alpha < 1 + 2\sqrt{\alpha} + \alpha^2 \Leftrightarrow$

$1 + \alpha < 1 + 2\sqrt{\alpha} + \alpha^2 \Leftrightarrow 0 < 2\sqrt{\alpha}$ ισχύει.

Θέμα 3ο

34910. α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 4x + 3 < 0$ (1).

β) Αν η (1) έχει λύσεις τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $1 < x < 3$ και οι αριθμοί α, β είναι λύσεις της ανίσωσης (1), να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\alpha + \beta}{2}$ είναι επίσης λύση της ανίσωσης (1).

Λύση

α) Το τριώνυμο $x^2 - 4x + 3 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 4$ και ρίζες $x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$.

Το πρόσημο φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Άρα η ανίσωση έχει λύσεις τα $x \in (1, 3)$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$	+	0	0	+

β) Είναι $1 < \alpha < 3$ (Α) και $1 < \beta < 3$ (Β) άρα από (Α), (Β) είναι $2 < \alpha + \beta < 6 \Leftrightarrow 1 < \frac{\alpha + \beta}{2} < 3$.

Πρόοδοι

Ακολουθίες

Θέμα 4ο

13056. Οι αριθμοί 1, 3, 6, 10, ... και γενικά αυτοί που είναι δυνατόν, αν παρασταθούν με τελείες, να τοποθετηθούν σε μια τριγωνική διάταξη της μορφής που φαίνεται στον παρακάτω πίνακα λέγονται τριγωνικοί. Αποδεικνύεται ότι ο νιοστός τριγωνικός αριθμός δίνεται

•	• •	• • •	• • • •	...
1	3	6	10	...

από τον τύπο $T_v = \frac{v(v+1)}{2}$, $v \in \mathbb{N}^*$.

α) Να βρείτε τον 10^ο τριγωνικό αριθμό.

β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 120 είναι τριγωνικός.

γ) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα δυο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο θετικού ακεραίου.

Λύση

α) Ο δέκατος τριγωνικός αριθμός είναι $T_{10} = \frac{10 \cdot (10+1)}{2} = \frac{110}{2} = 55$.

β) Ο αριθμός 120 είναι τριγωνικός μόνο όταν η εξίσωση $T_v = 120$ έχει λύση θετικό ακέραιο αριθμό.

$$\text{Είναι: } T_v = 120 \Leftrightarrow \frac{v(v+1)}{2} = 120 \Leftrightarrow v^2 + v = 240 \Leftrightarrow v^2 + v - 240 = 0$$

Η τελευταία είναι 2^{ου} βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-240) = 961$ και ρίζες

$$v_1 = \frac{-1 + \sqrt{961}}{2} = \frac{-1 + 31}{2} = 15, \quad v_2 = \frac{-1 - \sqrt{961}}{2} = \frac{-1 - 31}{2} = -16 \text{ που απορρίπτεται αφού ο } v \text{ είναι φυσικός αριθμός.}$$

γ) Έστω T_v, T_{v+1} δυο διαδοχικοί τριγωνικοί αριθμοί με v θετικό ακέραιο. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} T_v + T_{v+1} &= \frac{v(v+1)}{2} + \frac{(v+1)(v+2)}{2} = \frac{v(v+1) + (v+1)(v+2)}{2} = \\ &= \frac{(v+1)(v+v+2)}{2} = \frac{(v+1)(2v+2)}{2} = \frac{(v+1) \cdot 2(v+1)}{2} = (v+1)^2 \end{aligned}$$

οπότε το άθροισμα δυο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο θετικού ακεραίου.

Αριθμητική πρόοδος

Θέμα 2ο

14259. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) δίνονται οι δυο πρώτοι όροι, $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_2 = 7$.

- α) Να βρείτε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.
 β) Να δείξετε ότι ο 20^{ος} όρος της προόδου ισούται με 97.
 γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $2 + 7 + 12 + \dots + 97$.

Λύση

α) $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 = 7 - 2 = 5$

β) $\alpha_{20} = \alpha_1 + (20 - 1)\omega = 2 + 19 \cdot 5 = 97$

γ) $2 + 7 + 12 + \dots + 97 = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{20} = S_{20} = \frac{20}{2}(\alpha_1 + \alpha_{20}) = 10(2 + 97) = 990$

14476. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) των θετικών περιττών αριθμών: 1, 3, 5, 7, ...

- α) i) Να γράψετε τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου.
 ii) Να βρείτε τον τριακοστό της όρο.
 β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της προόδου ισούται με 30^2 .

Λύση

α) i) Ο πρώτος όρος είναι $\alpha_1 = 1$ και η διαφορά $\omega = 3 - 1 = 2$

ii) $\alpha_{30} = \alpha_1 + 29\omega = 1 + 29 \cdot 2 = 1 + 58 = 59$

β) $S_{30} = \frac{30}{2}(\alpha_1 + \alpha_{30}) = 15(1 + 59) = 15 \cdot 60 = 15 \cdot 2 \cdot 30 = 30 \cdot 30 = 30^2$

14512. α) Να λύσετε τις εξισώσεις $x^2 = 1$ και $x^2 = 9$.

- β) Να διατάξετε τις λύσεις των εξισώσεων του α) ερωτήματος αύξουσα σειρά και στη συνέχεια:
 i) να δείξετε ότι με αυτή τη σειρά αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου (α_n) της οποίας να βρείτε την διαφορά ω .
 ii) να δείξετε ότι ο αριθμός 46 δεν αποτελεί όρο της προόδου (α_n) .

Λύση

α) $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x = \pm 1$, $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x = \pm 3$

β) Είναι $-3 < -1 < 1 < 3$.

i) Αφού $3 - 1 = 1 - (-1) = -1 - (-3) = 2$ τότε οι αριθμοί $-3, -1, 1, 3$ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με διαφορά $\omega = 2$

ii) Οι αριθμοί 1, 3 είναι περιττοί και είναι διαδοχικοί όροι της προόδου και αφού έχει διαφορά 2 τότε όλοι οι επόμενοι όροι είναι περιττοί αριθμοί άρα ο αριθμός 46 (άρτιος) δεν αποτελεί όρο της προόδου.

14573. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_n) για την οποία ισχύει: $\alpha_4 - \alpha_2 = 10$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 5$.

β) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι 33, να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου.

Λύση

α) Είναι $\alpha_4 - \alpha_2 = 10 \Leftrightarrow \alpha_1 + 3\omega - (\alpha_1 + \omega) = 10 \Leftrightarrow \alpha_1 + 3\omega - \alpha_1 - \omega = 10 \Leftrightarrow 2\omega = 10 \Leftrightarrow \omega = 5$

β) Είναι $S_3 = 33 \Leftrightarrow \frac{3}{2}(2\alpha_1 + 2\omega) = 33 \Leftrightarrow 6\alpha_1 + 6\omega = 66 \Leftrightarrow \alpha_1 + \omega = 11 \Leftrightarrow \alpha_1 + 5 = 11 \Leftrightarrow \alpha_1 = 6$

14574. Ο 1ος όρος μιας αριθμητικής προόδου (α_n) ισούται με 2 και ο 3ος όρος ισούται με 8.

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.

β) Αν είναι $\omega = 3$, να βρείτε ποιος όρος της προόδου ισούται με 35.

Λύση

α) $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\omega \Leftrightarrow 8 = 2 + 2\omega \Leftrightarrow 2\omega = 6 \Leftrightarrow \omega = 3$

β) $\alpha_v = 35 \Leftrightarrow \alpha_1 + (v-1)\omega = 35 \Leftrightarrow 2 + 3v - 3 = 35 \Leftrightarrow 3v = 36 \Leftrightarrow v = 12$ άρα ο 12^{ος} όρος ισούται με 35.

14597. Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε σειρά έχει 4 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η 7η σειρά έχει 36 καθίσματα.

α) Αποτελούν τα καθίσματα του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

β) Να βρείτε το πλήθος των καθισμάτων της πρώτης σειράς.

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γήπεδο συνολικά;

Λύση

α) Αν θεωρήσω μία ακολουθία (α_n) , όπου

α_1 η πρώτη σειρά καθισμάτων,

α_2 η δεύτερη σειρά καθισμάτων

Κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενο με πρόσθεση του αριθμού 4. Άρα είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά 4.

β) $\alpha_7 = 36 \Leftrightarrow \alpha_1 + 6 \cdot 4 = 36 \Leftrightarrow \alpha_1 = 36 - 24 = 12$

γ) Αφού το γήπεδο έχει δέκα σειρές, τότε το πλήθος των καθισμάτων συνολικά δίνεται από τον τύπο:

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2\alpha_1 + 9\omega) = 5(2 \cdot 12 + 9 \cdot 4) = 5(24 + 36) = 5 \cdot 60 = 300$$

14656. Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_n) δίνονται $\alpha_1 = 41$ και $\alpha_6 = 26$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με -3.

β) Να βρείτε το θετικό ακέραιο n , ώστε $\alpha_n = n$.

Λύση

α) Είναι $\alpha_6 = \alpha_1 + (6-1)\omega \Leftrightarrow 26 = 41 + 5\omega \Leftrightarrow 5\omega = 26 - 41 \Leftrightarrow 5\omega = -15 \Leftrightarrow \omega = -3$

β) $\alpha_n = n \Leftrightarrow 41 + (n-1) \cdot (-3) = n \Leftrightarrow 41 - 3n + 3 = n \Leftrightarrow 44 = 4n \Leftrightarrow n = 11$

34145. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_n) με διαφορά ω .

α) Να δείξετε ότι: $\frac{\alpha_{15} - \alpha_9}{\alpha_{10} - \alpha_7} = 2$.

β) Αν $\alpha_{15} - \alpha_9 = 18$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.

Λύση

α) $\frac{\alpha_{15} - \alpha_9}{\alpha_{10} - \alpha_7} = 2 \Leftrightarrow \alpha_{15} - \alpha_9 = 2(\alpha_{10} - \alpha_7) \Leftrightarrow \alpha_1 + 14\omega - (\alpha_1 + 8\omega) = 2[\alpha_1 + 9\omega - (\alpha_1 + 6\omega)] \Leftrightarrow$

$\cancel{\alpha_1} + 14\omega - \cancel{\alpha_1} - 8\omega = 2(\cancel{\alpha_1} + 9\omega - \cancel{\alpha_1} - 6\omega) \Leftrightarrow 6\omega = 2 \cdot 3\omega \Leftrightarrow 6\omega = 6\omega$ ισχύει

β) $\frac{\alpha_{15} - \alpha_9}{\alpha_{10} - \alpha_7} = 2$ (1), $\alpha_{15} - \alpha_9 = 18$ (2)

Από την (1) $\Rightarrow \frac{18}{\alpha_{10} - \alpha_7} = 2 \Leftrightarrow 18 = 2(\alpha_{10} - \alpha_7) \stackrel{(:2)}{\Leftrightarrow} 9 = \alpha_{10} - \alpha_7 \Leftrightarrow 9 = \cancel{\alpha_1} + 9\omega - \cancel{\alpha_1} - 6\omega \Leftrightarrow 9 = 3\omega \Leftrightarrow \omega = 3$

34147. Σε αριθμητική πρόοδο (α_n) με διαφορά $\omega = 4$, ισχύει: $\alpha_6 + \alpha_{11} = 40$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 της προόδου.

β) Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το μηδέν; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) $\alpha_6 + \alpha_{11} = 40 \Leftrightarrow \alpha_1 + 5\omega + \alpha_1 + 10\omega = 40 \Leftrightarrow 2\alpha_1 + 15\omega = 40 \Leftrightarrow$

$2\alpha_1 + 15 \cdot 4 = 40 \Leftrightarrow 2\alpha_1 + 60 = 40 \Leftrightarrow 2\alpha_1 = -20 \Leftrightarrow \alpha_1 = -10$

β) $S_v = 0 \Leftrightarrow \frac{v}{2}(2\alpha_1 + (v-1)\omega) = 0 \stackrel{v \neq 0}{\Leftrightarrow} 2 \cdot (-10) + (v-1)4 = 0 \Leftrightarrow -20 + 4v - 4 = 0 \Leftrightarrow 4v = 24 \Leftrightarrow v = 6$

Επομένως θα πρέπει να προσθέσουμε τους έξι πρώτους όρους

34153. Οι αριθμοί $x+6$, $5x+2$, $11x-6$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω .

α) Να βρείτε την τιμή του x και να αποδείξετε ότι $\omega = 4$.

β) Αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 0$, να υπολογίσετε το άθροισμα S_8 των 8 πρώτων όρων.

Λύση

α) Αφού είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου ισχύει :

$2(5x+2) = \cancel{x+6} + 11x - \cancel{6} \Leftrightarrow 10x + 4 = 12x \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$

Άρα οι αριθμοί που δίνονται είναι οι 8, 12, 16 και $\omega = 12 - 8 = 4$.

β) $S_8 = \frac{8}{2}(2\alpha_1 + 7\omega) = 4 \cdot (0 + 7 \cdot 4) = 4 \cdot 28 = 112$

34158. Σε αριθμητική πρόοδο (α_n) είναι $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_5 = 14$.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 3$.

β) Να βρείτε πόσους αρχικούς (πρώτους) όρους πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77.

(Δίνεται: $\sqrt{1849} = 43$).

Λύση

$$\alpha) \alpha_5 = 14 \Leftrightarrow \alpha_1 + 4\omega = 14 \Leftrightarrow 2 + 4\omega = 14 \Leftrightarrow 4\omega = 12 \Leftrightarrow \omega = 3$$

$$\beta) S_v = 77 \Leftrightarrow \frac{v}{2}(2\alpha_1 + (v-1)\omega) = 77 \Leftrightarrow v(2 \cdot 2 + (v-1) \cdot 3) = 154 \Leftrightarrow$$

$$v(4 + 3v - 3) = 154 \Leftrightarrow v(3v + 1) - 154 = 0 \Leftrightarrow 3v^2 + v - 154 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-154) = 1 + 1848 = 1849$$

$$\text{Άρα } v = \frac{-1 + \sqrt{1849}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 + 43}{6} = \frac{42}{6} = 7 \text{ ή } v = \frac{-1 - \sqrt{1849}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 - 43}{6} = \frac{-44}{6} = -\frac{22}{3} < 0 \text{ απορρίπτεται}$$

34871. α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x , ώστε οι αριθμοί $x+2$, $x+1$, $3x+2$, με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

β) Για $x = -1$, να βρείτε τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου.

Λύση

α) Είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνον αν

$$2(x+1) = (x+2) + (3x+2) \Leftrightarrow 2x+2 = 4x+4 \Leftrightarrow 2x = -2 \Leftrightarrow x = -1$$

β) Για $x = -1$ οι αριθμοί 1, 0, -1 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και η διαφορά είναι $\omega = 0 - 1 = -1 - 0 = -1$.

34877. α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 2x - 3 = 0$ (1).

β) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί $x_1, 1, x_2$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Λύση

$$\alpha) \text{ Η εξίσωση (1) έχει } \Delta = 16 \text{ και ρίζες } x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

β) Είναι $x_1 = -1$ και $x_2 = 3$. Οι αριθμοί -1, 1, 3 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με την σειρά που δίνονται αν και μόνον αν $2 \cdot 1 = -1 + 3 \Leftrightarrow 2 = 2$ πράγμα που ισχύει.

35046. Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_n) ισχύουν: $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$.

β) Να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 152.

Λύση

$$\alpha) \alpha_{25} = \alpha_{12} + 39 \Leftrightarrow \cancel{\alpha_1} + 24\omega = \cancel{\alpha_1} + 11\omega + 39 \Leftrightarrow \omega = 3$$

β) $\alpha_v = 152 \Leftrightarrow \alpha_1 + (v-1)\omega = 152 \Leftrightarrow 2 + (v-1) \cdot 3 = 152 \Leftrightarrow$
 $2 + 3v - 3 = 152 \Leftrightarrow 3v = 153 \Leftrightarrow v = 51$. Άρα ο 51^{ος} όρος είναι ίσος με 152.

35143. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_v) με όρους $\alpha_2 = 0$, $\alpha_4 = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 2$ και $\alpha_1 = -2$, όπου ω είναι η διαφορά της προόδου και α_1 ο πρώτος όρος της.

β) Να αποδείξετε ότι ο v -οστός όρος της προόδου είναι ίσος με $\alpha_v = 2v - 4$, $v \in \mathbb{N}^*$ και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98.

Λύση

α) $\alpha_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 + \omega = 0$ (1), $\alpha_4 = 4 \Leftrightarrow \alpha_1 + 3\omega = 4$ (2)

Από (2) - (1) $\Rightarrow \cancel{\alpha_1} + 3\omega - \cancel{\alpha_1} - \omega = 4 - 0 \Leftrightarrow 2\omega = 4 \Leftrightarrow \omega = 2$ (3)

Άρα (1) $\Leftrightarrow \alpha_1 + 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = -2$

β) $\alpha_v = \alpha_1 + (v-1) \cdot \omega = -2 + (v-1) \cdot 2 = -2 + 2v - 2 = 2v - 4$ $\alpha_v = 98 \Leftrightarrow 2v - 4 = 98 \Leftrightarrow 2v = 102 \Leftrightarrow v = 51$

35299. Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη της.

α) Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της v -οστής σειράς.

β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά;

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο;

Λύση

α) Αν θεωρήσω μία ακολουθία (α_v) , όπου

α_1 η πρώτη σειρά καθισμάτων,

α_2 η δεύτερη σειρά καθισμάτων, ...

Κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενο με πρόσθεση του αριθμού 20. Άρα είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega = 20$ και $\alpha_1 = 120$. Το πλήθος των καθισμάτων της v -οστής σειράς είναι:

$$\alpha_v = \alpha_1 + (v-1)\omega = 120 + (v-1) \cdot 20 = 120 + 20v - 20 = 100 + 20v$$

β) $\alpha_{10} = 100 + 20 \cdot 10 = 100 + 200 = 300$

γ) $S_{10} = \frac{10}{2}(2\alpha_1 + 9\omega) = 5(2 \cdot 120 + 9 \cdot 20) = 5(240 + 180) = 5 \cdot 420 = 2100$

35375. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_v) για την οποία ισχύει ότι: $\alpha_1 = 19$ και $\alpha_{10} - \alpha_6 = 24$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 6$.

β) Να βρείτε τον α_{20}

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου.

Λύση

α) $\alpha_{10} - \alpha_6 = 24 \Leftrightarrow \alpha_1 + 9\omega - (\alpha_1 + 5\omega) = 24 \Leftrightarrow \cancel{\alpha_1} + 9\omega - \cancel{\alpha_1} - 5\omega = 24 \Leftrightarrow 4\omega = 24 \Leftrightarrow \omega = 6$

β) $\alpha_{20} = \alpha_1 + 19\omega = 19 + 19 \cdot 6 = 19 + 114 = 133$

$$\gamma) S_{20} = \frac{20}{2}(2\alpha_1 + 19\omega) = 10(2 \cdot 19 + 19 \cdot 6) = 10 \cdot (38 + 114) = 10 \cdot 152 = 1520$$

35408. Οι αριθμοί $A=1$, $B=x+4$, $\Gamma=x+8$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_n) .

α) Να βρείτε τη τιμή του x .

β) Αν $x=1$ και ο αριθμός A είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου (α_n) ,

i) να υπολογίσετε τη διαφορά ω .

ii) να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου.

Λύση

α) Αφού είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου ισχύει

$$2B = A + \Gamma \Leftrightarrow 2(x+4) = 1 + x + 8 \Leftrightarrow 2x + 8 = 1 + x + 8 \Leftrightarrow x = 1$$

β) Για $x=1$ οι αριθμοί που μας δίνονται είναι οι $A=\alpha_1=1$, $B=5$, $\Gamma=9$.

i) Τότε $\omega = B - A = 5 - 1 = 4$

ii) $\alpha_{20} = \alpha_1 + 19\omega = 1 + 19 \cdot 4 = 1 + 76 = 77$

36897. α) Να βρείτε το άθροισμα των n πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραιών $1, 2, 3, \dots, n$.

β) Να βρείτε πόσους από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε άθροισμα τον αριθμό 45.

Λύση

α) Έχουμε την ακολουθία $\alpha_n = n$ και $\alpha_{n+1} - \alpha_n = n+1 - n = 1$, άρα είναι αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = 1$

$$\text{και } \omega = 1. S_n = \frac{n}{2}(2\alpha_1 + (n-1) \cdot \omega) = \frac{n}{2}(2 \cdot 1 + (n-1) \cdot 1) = \frac{n}{2}(2 + n - 1) = \frac{n}{2}(1 + n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\beta) S_n = 45 \Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 45 \Leftrightarrow n^2 + n = 90 \Leftrightarrow n^2 + n - 90 = 0, \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-90) + 360 = 361 = 19^2$$

$$n = \frac{-1 \pm 19}{2} = \frac{18}{2} = 9 \text{ ή } n = \frac{-1 - 19}{2} = \frac{-20}{2} = -10 \text{ απορρίπτεται (} n > 0 \text{)}$$

Θέμα 4ο

12694. Ένα παιχνίδι στον υπολογιστή έχει επίπεδα δυσκολίας. Ένας παίκτης έχει καθορισμένο χρόνο για να ολοκληρώσει κάθε επίπεδο. Στο επίπεδο 1 (το πιο εύκολο επίπεδο) ο παίκτης έχει χρονικό όριο 300 δευτερολέπτων για να το ολοκληρώσει. Στο επίπεδο 4 το χρονικό όριο είναι 255 δευτερόλεπτα. Οι μέγιστοι επιτρεπόμενοι χρόνοι σε κάθε επίπεδο αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου.

α) Να υπολογίσετε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. Τι δηλώνει η διαφορά ω στο πλαίσιο του προβλήματος;

β) Το τελευταίο επίπεδο έχει χρονικό όριο 45 δευτερολέπτων. Να βρείτε τον αριθμό των επιπέδων στο παιχνίδι.

γ) Να βρείτε τον μέγιστο επιτρεπόμενο χρόνο που θα χρειαστεί ένας παίκτης για να ολοκληρώσει το παιχνίδι.

δ) Ένας παίκτης ολοκληρώνει το επίπεδο 1 σε 147 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 2 σε 150 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 3 σε 153 και κάθε φορά που ανεβαίνει επίπεδο χρειάζεται 3 επιπλέον δευτερόλεπτα. Μέχρι ποιο επίπεδο θα προλάβει να παίξει; Θα ολοκληρώσει το παιχνίδι;

Λύση

α) Το χρονικό όριο του επιπέδου 1 είναι $\alpha_1 = 300$ δευτερόλεπτα και του επιπέδου 4 είναι $\alpha_4 = 255$ δευτερόλεπτα. Σε μια αριθμητική πρόοδο ο γενικός όρος δίνεται από τη σχέση: $\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega$, οπότε $\alpha_4 = \alpha_1 + 3\omega$, δηλαδή $255 = 300 + 3\omega \Leftrightarrow \omega = -15$. Αυτό σημαίνει ότι όσο αυξάνει το επίπεδο δυσκολίας (από 1 σε 2, από 2 σε 3, από 3 σε 4, κ.ο.κ) το χρονικό όριο που έχει ο παίκτης για να το ολοκληρώσει ελαττώνεται (σταθερά) κατά 15 δευτερόλεπτα κάθε φορά.

β) Αν τα επίπεδα είναι στο σύνολό τους n , τότε $\alpha_n = 45$ (το τελευταίο επίπεδο έχει χρονικό όριο 45 δευτερολέπτων) και ζητάμε την τιμή του n . Άρα $\alpha_n = 45 \Leftrightarrow \alpha_1 + (n-1)\omega = 45 \Leftrightarrow 300 + (n-1)(-15) = 45 \Leftrightarrow 300 - 15n + 15 = 45 \Leftrightarrow 15n = 270 \Leftrightarrow n = 18$. Άρα το παιχνίδι ολοκληρώνεται σε 18 επίπεδα.

γ) Ο μέγιστος επιτρεπόμενος χρόνος που θα χρειαστεί ένας παίκτης για να ολοκληρώσει το παιχνίδι θα προκύψει αν προσθέσουμε το μέγιστο χρονικό όριο και των 18 επιπέδων του παιχνιδιού, δηλαδή

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{18} = S_{18}. \text{ Στην αριθμητική πρόοδο ισχύει η σχέση: } S_n = \frac{n}{2}(\alpha_1 + \alpha_n) \text{ οπότε}$$

$$S_{18} = \frac{18}{2}(\alpha_1 + \alpha_{18}) = 9(300 + 45) = 3105.$$

Ο μέγιστος χρόνος που θα χρειαστεί ένας παίκτης για να ολοκληρώσει το παιχνίδι είναι 3105 δευτερόλεπτα (δηλαδή 51 λεπτά και 45 δευτερόλεπτα).

δ) Αν $\beta_1 = 147$ είναι ο χρόνος που χρειάζεται ο παίκτης για να ολοκληρώσει το επίπεδο 1, β_n είναι ο χρόνος που χρειάζεται για να ολοκληρώσει το επίπεδο n , τότε β_n είναι αριθμητική πρόοδος με $\beta_1 = 147$ και $\omega = 3$. Θέλουμε να ελέγξουμε αν ο χρόνος που χρειάζεται ο παίκτης για να ολοκληρώσει κάθε επίπεδο είναι μικρότερος ή ίσος από τον μέγιστο επιτρεπόμενο χρόνο κάθε επιπέδου.

Θέλουμε τη μέγιστη τιμή του $n \in \mathbb{N}$, ώστε $\beta_n \leq \alpha_n \Leftrightarrow 147 + (n-1) \cdot 3 \leq 300 + (n-1)(-15) \Leftrightarrow$

$$144 + 3n - 3 \leq 315 - 15n \Leftrightarrow 18n \leq 174 \Leftrightarrow n \leq \frac{174}{18} = 9,7$$

Άρα η μέγιστη τιμή του n είναι 9, που σημαίνει ότι ο παίκτης, με το ρυθμό που παίζει, θα ολοκληρώσει μόνο 9 από τα 18 επίπεδα του παιχνιδιού.

12764. Σε ένα γήπεδο καλαθοσφαίρισης, σε μία από τις κερκίδες του, η οποία διαθέτει 40 σειρές καθισμάτων, στη 10η σειρά υπάρχουν 50 καθίσματα. Μετά την πρώτη σειρά κάθε επόμενη διαθέτει 2 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη σειρά.

α) Αν α_n το πλήθος των καθισμάτων της n -οστής σειράς, τότε να αποδείξετε ότι α_n είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και τη διαφορά ω .

β) Να υπολογίσετε το σύνολο των καθισμάτων που διαθέτει η συγκεκριμένη κερκίδα.

γ) Αν για λόγους ασφαλείας σε έναν αγώνα επιτρέπεται να καθίσουν θεατές μόνο στις περιττές σειρές καθισμάτων της κερκίδας, να βρείτε πόσους καθήμενους θεατές θα χωρέσει αυτή η κερκίδα.

Λύση

α) Ισχύει ότι $\alpha_{n+1} = \alpha_n + 2$, άρα είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega = 2$. Σε μία αριθμητική πρόοδο ισχύει ότι: $\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega$, οπότε $\alpha_{10} = \alpha_1 + (10-1)\omega \Leftrightarrow 50 = \alpha_1 + 9 \cdot 2 \Leftrightarrow \alpha_1 = 50 - 18 = 32$. Συνεπώς ισχύει ότι $\alpha_1 = 32$ και $\omega = 2$.

β) Είναι $S_n = \frac{n}{2}[2\alpha_1 + (n-1)\omega]$, οπότε $S_{40} = \frac{40}{2}[2 \cdot 32 + (40-1) \cdot 2] = 20 \cdot 142 = 2.840$

Συνεπώς, το σύνολο των καθισμάτων της κερκίδας είναι 2.840.

γ) Η 1η σειρά καθισμάτων έχει 32 καθίσματα, η 2η 34 και η 3η 36. Αν οι θεατές μπορούν να καθίσουν μόνο στις περιττές σειρές καθισμάτων, τότε δημιουργείται μία αριθμητική πρόοδος με $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_3, \dots$. Είναι $\beta_2 - \beta_1 = \alpha_3 - \alpha_1 = 4$, οπότε είναι αριθμητική πρόοδος με $\beta_1 = 32$ και διαφορά $\omega' = 4$. Το πλήθος των όρων αυτής της αριθμητικής προόδου που πρέπει να καταμετρηθεί είναι οι 20 πρώτοι όροι, καθώς σε 40 σειρές καθισμάτων οι μισές θα είναι περιττές. Οπότε το πλήθος των θεατών που μπορούν να καθίσουν στην κερκίδα είναι:

$$S_{20} = \frac{20}{2} [2 \cdot 32 + (20-1) \cdot 4] = 10 \cdot 140 = 1.400$$

12945. Θεωρούμε αριθμητική πρόοδο (α_n) , $n \in \mathbb{N}^*$ με $\alpha_3 = 8, \alpha_{11} = 32$ και την αριθμητική πρόοδο (β_n) , $n \in \mathbb{N}^*$ που περιέχει τους περιττούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 56.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 3$.

β) Να βρείτε αν ο αριθμός β_2 περιέχεται στην πρώτη πρόοδο.

γ) Αν το άθροισμα των $2n$ πρώτων όρων της $\varepsilon(\alpha_n)$ ίναι ίσο με το άθροισμα των n πρώτων όρων της (β_n) να βρείτε τον αριθμό n .

Λύση

α) Είναι $\alpha_3 = 8 \Leftrightarrow \alpha_1 + 2\omega = 8$ (1) και $\alpha_{11} = 32 \Leftrightarrow \alpha_1 + 10\omega = 32$ (2). Αν από την (2) αφαιρέσουμε την (1) προκύπτει: $8\omega = 24 \Leftrightarrow \omega = 3$ και με αντικατάσταση στην (1) $\Rightarrow \alpha_1 + 2 \cdot 3 = 8 \Leftrightarrow \alpha_1 = 2$.

β) Η πρόοδος (β_n) έχει πρώτο όρο $\beta_1 = 57$ και διαφορά $\omega' = 2$ οπότε $\beta_2 = \beta_1 + \omega' = 57 + 2 = 59$.

Είναι $\alpha_v = \beta_2 \Leftrightarrow \alpha_1 + (v-1)\omega = 59 \Leftrightarrow 2 + 3(v-1) = 59 \Leftrightarrow 2 + 3v - 3 = 59 \Leftrightarrow 3v = 60 \Leftrightarrow v = 20$.

Επομένως ο εικοστός όρος της πρώτης προόδου είναι ίσος με τον δεύτερο όρο της δεύτερης.

γ) Το άθροισμα των $2n$ πρώτων όρων της α_n είναι ίσο με το άθροισμα των n πρώτων όρων της β_n , οπότε

$$\begin{aligned} \text{έχουμε: } \frac{2n}{2} [2\alpha_1 + (2n-1)\omega] &= \frac{n}{2} [2\beta_1 + (n-1)\omega'] \Leftrightarrow \cancel{n} (2 \cdot 2 + 3(2n-1)) = \frac{\cancel{n}}{2} (2 \cdot 57 + 2(n-1)) \Leftrightarrow \\ 4 + 6n - 3 &= \frac{114 + 2n - 2}{2} \Leftrightarrow 2 + 12n = 112 + 2n \Leftrightarrow 10n = 110 \Leftrightarrow n = 11 \end{aligned}$$

13089. Η Μαρία αγόρασε ένα βιβλίο που το διάβασε δυο φορές γιατί της άρεσε πολύ! Την πρώτη φορά, διάβασε την 1η ημέρα 1 σελίδα, την 2η ημέρα 3 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες περισσότερες από την προηγούμενη. Τη δεύτερη φορά άλλαξε τρόπο διαβάσματος. Διάβασε την 1η ημέρα 13 σελίδες, την 2η ημέρα 11 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες λιγότερες από την προηγούμενη. Η Μαρία παρατήρησε ότι και τις δυο φορές χρειάστηκε ακριβώς το ίδιο πλήθος ημερών για να διαβάσει το βιβλίο.

α) i. Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα την πρώτη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου (α_n) της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο α_n , αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα.

ii. Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα τη δεύτερη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου (β_n) της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο β_n , αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα.

β) Να δείξετε ότι η Μαρία χρειάστηκε 7 ημέρες για να διαβάσει το βιβλίο.

γ) Να βρείτε πόσες σελίδες έχει το βιβλίο.

δ) Να δείξετε ότι $\alpha_v = \beta_{8-v}$ για κάθε $v=1, 2, \dots, 7$.

Λύση

α) i. Η ακολουθία (α_v) είναι αριθμητική πρόοδος αφού κάθε όρος της, μετά τον 1ο, προκύπτει από τον προηγούμενο με πρόσθεση του αριθμού 2. Είναι $\alpha_1=1$ και $\omega=2$ οπότε ο γενικός της όρος είναι $\alpha_v = \alpha_1 + (v-1)\omega = 1 + (v-1) \cdot 2 = 1 + 2v - 2 = 2v - 1$

ii. Η ακολουθία (β_v) είναι αριθμητική πρόοδος αφού κάθε όρος της μετά τον 1ο, προκύπτει από τον προηγούμενο με πρόσθεση του αριθμού -2. Είναι $\beta_1=13$ και $\omega=-2$ οπότε ο γενικός της όρος είναι $\beta_v = \beta_1 + (v-1)\omega = 13 + (v-1) \cdot (-2) = 13 - 2v + 2 = 15 - 2v$

β) Έστω ότι διάβασε το βιβλίο σε v ημέρες. Τότε την πρώτη φορά διάβασε

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v = S_v = \frac{v}{2}(\alpha_1 + \alpha_v) = \frac{v}{2}(1 + 2v - 1) = v^2 \text{ σελίδες}$$

$$\text{Την δεύτερη φορά διάβασε } \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_v = S_v = \frac{v}{2}(\beta_1 + \beta_v) = \frac{v}{2}(13 + 15 - 2v) = 14v - v^2 \text{ σελίδες}$$

Όμως και τις δύο φορές διάβασε όλο το βιβλίο, άρα

$$v^2 = 14v - v^2 \Leftrightarrow 2v^2 - 14v = 0 \Leftrightarrow 2v(v-7) = 0 \Leftrightarrow v=0 \text{ απορρίπτεται ή } v=7 \text{ ημέρες.}$$

γ) Το πλήθος των σελίδων του βιβλίου είναι $S_7 = 7^2 = 49$.

$$\delta) \beta_{8-v} = 15 - 2(8-v) = 15 - 16 + 2v = 2v - 1 = \alpha_v$$

13171. Το άθροισμα των v πρώτων διαδοχικών όρων μιας ακολουθίας (α_v) είναι $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v = S_v = 2v^2 + 3v$, $v \in \mathbb{N}$ με $v \geq 1$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 .

β) Να αποδείξετε ότι $S_{v-1} = 2v^2 - v - 1$, $v \geq 2$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\alpha_v = 4v + 1$, $v \geq 1$.

δ) Να αποδείξετε ότι αυτή η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω .

Λύση

α) Είναι $S_v = \alpha_1$, όμως $S_1 = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = 5$, άρα $\alpha_1 = 5$.

β) Είναι $S_v = 2v^2 + 3v$ για κάθε $v \geq 1$, οπότε θέτοντας όπου v το $v-1$, έχουμε

$$S_{v-1} = 2(v-1)^2 + 3(v-1) = 2(v^2 - 2v + 1) + 3v - 3 = 2v^2 - 4v + 2 + 3v - 3 = 2v^2 - v - 1 \text{ με } v-1 \geq 1 \Leftrightarrow v \geq 2$$

γ) Είναι $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{v-1} + \alpha_v = S_v$ και $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{v-1} = S_{v-1}$

Αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτει ότι

$$\alpha_v = S_v - S_{v-1} \Leftrightarrow \alpha_v = 2v^2 + 3v - (2v^2 - v - 1) = \cancel{2v^2} + 3v - \cancel{2v^2} + v + 1 = 4v + 1 \text{ για κάθε } v \geq 2.$$

Επειδή $\alpha_1 = 5 = 4 \cdot 1 + 1$, τελικά είναι $\alpha_v = 4v + 1$ για κάθε $v \geq 1$.

δ) Για να είναι η ακολουθία (α_v) αριθμητική πρόοδος, θα πρέπει η διαφορά δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών όρων να είναι σταθερή. Είναι

$$\alpha_{v+1} - \alpha_v = 4(v+1) + 1 - (4v+1) = 4v + 4 + 1 - 4v - 1 = 4, \text{ άρα } \omega = 4.$$

13173. Δίνεται η ακολουθία (α_v) με γενικό τύπο $\alpha_v = 10 + 3v$.

α) i. Να δείξετε ότι η ακολουθία (α_v) είναι αριθμητική πρόοδος.

ii. Να βρείτε τον πρώτο όρο της α_1 και τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου.

β) Να βρείτε ποιοι όροι της (α_v) βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401. Πόσοι είναι οι όροι αυτοί;

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των όρων που βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401.

Λύση

α) i. $\alpha_{v+1} - \alpha_v = 10 + 3(v+1) - (10 + 3v) = 10 + 3v + 3 - 10 - 3v = 3$, δηλαδή η διαφορά δυο οποιωνδήποτε διαδοχικών όρων της είναι σταθερή και ίση με 3, οπότε είναι αριθμητική πρόοδος με $\omega = 3$.

ii. Είναι $\omega = 3$ και $\alpha_1 = 10 + 3 = 13$

$$\beta) 14 < \alpha_v < 401 \Leftrightarrow 14 < 10 + 3v < 401 \Leftrightarrow 4 < 3v < 391 \Leftrightarrow \frac{4}{3} < v < \frac{391}{3}$$

Επειδή $\frac{4}{3} = 1,333...$ και $\frac{391}{3} = 130,333...$ οι όροι της αριθμητικής προόδου που είναι μεταξύ των αριθμών 14 και 401, είναι οι $\alpha_2, \dots, \alpha_{130}$. Επειδή από το 1 έως το 130 είναι 130 αριθμοί, από το 2 έως το 130 είναι 129 όροι.

$$\begin{aligned} \gamma) \alpha_2 + \dots + \alpha_{130} &= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{130} - \alpha_1 = S_{130} - \alpha_1 = \\ &= \frac{130}{2} [2 \cdot 13 + (130 - 1) \cdot 3] + 13 = 65(26 + 387) + 13 = 26.858 \end{aligned}$$

14809. Ο Θοδωρής γράφει διαδοχικά και επαναλαμβανόμενα τα γράμματα της λέξης «ΑΛΓΕΒΡΑ».

Στην πρώτη θέση το Α, στη δεύτερη το Λ, κοκ. Έτσι, σχηματίζεται η διαδοχή γραμμάτων: ΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑ...

α) Να αποδείξετε ότι οι θέσεις, στην διαδοχή, όπου συναντάμε το γράμμα Β σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο (α_v) με $\alpha_1 = 5$ και να βρείτε τη διαφορά της.

β) Να βρείτε σε ποια θέση της διαδοχής συναντάμε για 23^η φορά το γράμμα Β.

γ) Να βρείτε το γράμμα που βρίσκεται στην 200^η θέση στην παραπάνω διαδοχή.

Λύση

α) Το γράμμα Β υπάρχει ακριβώς μια φορά στη λέξη «ΑΛΓΕΒΡΑ». Την πρώτη φορά που το συναντάμε είναι στην 5^η θέση της διαδοχής και επειδή η λέξη έχει 7 γράμματα, η δεύτερη εμφάνιση του γράμματος Β είναι στην 12^η θέση και κάθε εμφάνισή του είναι 7 θέσεις μετά την προηγούμενη. Έτσι, η ακολουθία που σχηματίζουν οι θέσεις που συναντάμε το γράμμα Β είναι αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = 5$ και $\omega = 7$.

β) Αρκεί να βρούμε τον 23ο όρο της προόδου. Είναι: $\alpha_{23} = \alpha_1 + 22\omega = 5 + 22 \cdot 7 = 159$

γ) Αν διαιρέσουμε τον αριθμό 200 με το 7, βρίσκουμε πηλίκο 28 και υπόλοιπο 4, οπότε $200 = 7 \cdot 28 + 4$. Έτσι, μέχρι την 196^η θέση έχουμε 28 φορές επανάληψη της λέξης «ΑΛΓΕΒΡΑ» οπότε το γράμμα που βρίσκεται στην 200^η θέση είναι το 4ο γράμμα της λέξης, δηλαδή είναι το γράμμα Ε.

14758. Ένα εργοστάσιο κατασκευής πολυτελών αυτοκινήτων κατασκευάζει ένα νέο μοντέλο. Τον πρώτο μήνα κατασκευάστηκαν 5 τέτοια οχήματα. Στη συνέχεια όμως, κάθε μήνα κατασκευάζονταν 13 νέα οχήματα.

- α)** Πόσα αυτοκίνητα θα είναι κατασκευασμένα συνολικά στο τέλος κάθε μήνα στο διάστημα του πρώτου εξαμήνου;
β) Να αιτιολογήσετε γιατί ο συνολικός αριθμός των αυτοκινήτων που είναι κατασκευασμένα στο τέλος κάθε μήνα αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.
γ) Πόσα αυτοκίνητα κατασκευάστηκαν τα τέσσερα πρώτα χρόνια;
δ) Μετά από πόσους μήνες θα έχει κατασκευαστεί το 250^ο αυτοκίνητο;

Λύση

α) Στο τέλος του 1^{ου} μήνα θα είναι κατασκευασμένα 5 αυτοκίνητα. Στο τέλος του 2^{ου} μήνα θα είναι κατασκευασμένα 18 αυτοκίνητα. Στο τέλος του 3^{ου} μήνα θα είναι κατασκευασμένα 31 αυτοκίνητα. Στο τέλος του 4^{ου} μήνα θα είναι κατασκευασμένα 44 αυτοκίνητα. Στο τέλος του 5^{ου} μήνα θα είναι κατασκευασμένα 57 αυτοκίνητα και στο τέλος του 6^{ου} μήνα θα είναι κατασκευασμένα 70 αυτοκίνητα.

β) Τα αυτοκίνητα που είναι κατασκευασμένα στο τέλος κάθε μήνα είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = 5$ και διαφορά $\omega = 13$ (τα αυτοκίνητα που κατασκευάζονται κάθε μήνα αυξάνονται σταθερά κατά 13).

γ) Τα τέσσερα πρώτα χρόνια (στο τέλος του 48^{ου} μήνα δηλαδή) θα έχουν κατασκευαστεί:
 $\alpha_{48} = \alpha_1 + 47\omega = 5 + 47 \cdot 13 = 616$ αυτοκίνητα.

δ) Ζητάμε τον φυσικό αριθμό n για τον οποίο ισχύει:

$$\alpha_n \geq 250 \Leftrightarrow 5 + (n-1) \cdot 13 \geq 250 \Leftrightarrow 13n - 13 \geq 245 \Leftrightarrow 13n \geq 258 \Leftrightarrow n \geq \frac{259}{13}.$$

Επειδή $\frac{259}{13} \approx 19,92$, μετά από 20 μήνες θα έχει κατασκευαστεί το 250^ο αυτοκίνητο.

14927. Ένας χώρος δεξίωσης γάμων διαφημίζεται ως εξής: το κόστος για 50 καλεσμένους είναι 6560 ευρώ, ενώ για 100 καλεσμένους είναι 11910 ευρώ. Επιπλέον, μόνο για τη δέσμευση του χώρου πρέπει ο ενδιαφερόμενος να πληρώσει ένα πάγιο ποσό, ακόμα κι αν τελικά δεν γίνει η δεξίωση. Υποθέτουμε ότι οι τιμές του κόστους για τους καλεσμένους είναι όροι αριθμητικής προόδου (α_n).

α) Να δείξετε ότι το κόστος για n καλεσμένους είναι $\alpha_n = 107n + 1210$ (1).

β) Να ερμηνεύσετε τη σημασία

i. του αριθμού 1210 στη σχέση (1).

ii. της διαφοράς $\omega = 107$ της προόδου στο πλαίσιο του προβλήματος.

γ) Να υπολογίσετε το κόστος για 80 καλεσμένους.

Λύση

α) Το κόστος για 50 καλεσμένους είναι 6560 ευρώ, δηλαδή:

$$\alpha_{50} = 6560 \Leftrightarrow \alpha_1 + 49\omega = 6560 \Leftrightarrow \alpha_1 = 6560 - 49\omega \quad (1).$$

Το κόστος για 100 καλεσμένους είναι 11910 ευρώ, δηλαδή:

$$\alpha_{100} = 11910 \Leftrightarrow \alpha_1 + 99\omega = 11910 \Leftrightarrow \overset{(1)}{6560 - 49\omega} + 99\omega = 11910 \Leftrightarrow$$

$$50\omega = 11910 - 6560 \Leftrightarrow 50\omega = 5350 \Leftrightarrow \omega = 107. \text{ Τότε από τη σχέση (1) έχουμε:}$$

$$\alpha_1 = 6560 - 49 \cdot 107 = 6560 - 5243 = 1317$$

$$\text{Συνεπώς το κόστος για } n \text{ καλεσμένους είναι: } \alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega = 1317 + 107(n-1) = 107n + 1210$$

β) i. Όπως δείξαμε στο α) ερώτημα, $\alpha_n = 107n + 1210$ είναι το κόστος για n καλεσμένους. Ακόμα και αν δεν εμφανιστεί καλεσμένος στο γάμο, ο χώρος δεξίωσης θα κοστίσει στους ενδιαφερόμενους 1210 ευρώ.

ii. Επειδή η διαφορά ω της προόδου είναι 107 ευρώ, κάθε φορά που το πλήθος των καλεσμένων αυξάνει κατά ένα άτομο το κόστος της δεξίωσης του γάμου θα αυξάνει κατά 107 ευρώ.

γ) Είναι $\alpha_{80} = 107 \cdot 80 + 1210 = 9770$ ευρώ.

14962. Έστω μία αριθμητική πρόοδος (α_n) με διαφορά $\omega = 3$. Αν είναι γνωστό ότι στο διάστημα $\Delta = [2, 8]$ υπάρχουν ακριβώς 3 διαδοχικοί όροι της αριθμητικής προόδου (α_n) ,

α) Να εξετάσετε αν ο αριθμός μηδέν είναι όρος της (α_n) .

β) Να βρείτε τους 3 διαδοχικούς όρους της (α_n) που υπάρχουν στο $\Delta = [2, 8]$.

γ) Αν $\alpha_6 = 14$,

i. να βρείτε τον α_1 .

ii. να βρείτε το ελάχιστο πλήθος πρώτων όρων της (α_n) που πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμα να είναι μεγαλύτερο του 186.

(Δίνεται $\sqrt{4489} = 67$)

Λύση

α) Έστω ότι το 0 ήταν όρος της προόδου. Οι προηγούμενοι από το 0 όροι είναι αρνητικοί οπότε δεν ανήκουν στο Δ . Ο επόμενος όρος θα ήταν ο $0 + 3 = 3$, ο επόμενος $3 + 3 = 6$ και ο επόμενος $6 + 3 = 9$. Τότε στο διάστημα Δ θα βρίσκονταν μόνο δύο όροι της προόδου που είναι άτοπο. Άρα το 0 δεν είναι όρος της αριθμητικής προόδου (α_n) .

β) Έστω x ο πρώτος από τους 3 διαδοχικούς όρους της (α_n) . Τότε ο 2ος θα είναι ο $x + 3$ και ο τρίτος ο $x + 6$. Επειδή και οι τρεις όροι βρίσκονται στο διάστημα Δ , ισχύει ότι $2 \leq x \leq 8$ (1),

$$2 \leq x + 3 \leq 8 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 5 \quad (2)$$

$$\text{και } 2 \leq x + 6 \leq 8 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 2 \quad (3).$$

Από τις (1), (3) προκύπτει ότι $2 \leq x \leq 2$, άρα $x = 2$, ο οποίος επαληθεύει την (2) οπότε οι 3 όροι είναι οι 2, 5, 8.

$$\text{γ) i. } \alpha_6 = 14 \Leftrightarrow \alpha_1 + 5\omega = 14 \Leftrightarrow \alpha_1 + 15 = 14 \Leftrightarrow \alpha_1 = -1$$

$$\text{ii. } S_n = \frac{n}{2} [2\alpha_1 + (n-1)\omega] = \frac{n}{2} [-2 + 3(n-1)] = \frac{n}{2} (-2 + 3n - 3) \Leftrightarrow$$

$$S_n = \frac{n(3n-5)}{2} = \frac{3n^2 - 5n}{2}. \text{ Αναζητούμε τη μικρότερη τιμή του } n \text{ για την οποία}$$

$$S_n > 186 \Leftrightarrow \frac{3n^2 - 5n}{2} > 186 \Leftrightarrow 3n^2 - 5n > 372 \Leftrightarrow 3n^2 - 5n - 372 > 0. \text{ Το τριώνυμο } 3n^2 - 5n - 372 \text{ έχει}$$

$$\text{διακρίνουσα } \Delta = 4489 \text{ και ρίζες τους αριθμούς } 12 \text{ και } -\frac{31}{3}, \text{ άρα } \left(n < -\frac{31}{3} \text{ απορρίπτεται} \right) \text{ ή } (n > 12).$$

Επομένως η μικρότερη τιμή του φυσικού αριθμού n είναι το 13.

32741. Στην Α' τάξη ενός Λυκείου της Καρδίτσας η σύμβουλος των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιήσει μια δραστηριότητα. Επειδή όμως δεν γνωρίζει το πλήθος των μαθητών της τάξης, συμβουλευέται το Γυμναστή του σχολείου, που στοιχίζει τους μαθητές για τις παρελάσεις και εκείνος της απαντά με ένα πρόβλημα:

«Μπορώ να τοποθετήσω όλους τους μαθητές σε x σειρές με $x - 1$

μαθητές σε κάθε σειρά. Αν όμως θελήσω να τους τοποθετήσω σε $x+3$ σειρές με $x-3$ μαθητές σε κάθε σειρά, θα μου λείπει ένας μαθητής».

α) Να βρείτε την τιμή του x .

β) Να αποδείξετε η Α' τάξη έχει 90 μαθητές.

γ) Η σύμβουλος σκοπεύει να μοιράσει τους παραπάνω 90 μαθητές σε v ομάδες εργασίας, ώστε στην πρώτη ομάδα να πάνε 2 μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα να πηγαίνουν 2 παραπάνω κάθε φορά. Να βρείτε την τιμή του v , δηλαδή πόσες ομάδες εργασίας θα δημιουργηθούν.

Λύση

α) Το πλήθος των μαθητών είναι από το πρώτο δεδομένο $x(x-1)$ μαθητές. Από το δεύτερο δεδομένο είναι $(x-3)(x+3)-1$ μαθητές. Άρα :

$$x(x-1) = (x-3)(x+3)-1 \Leftrightarrow x^2 - x = x^2 - 9 - 1 \Leftrightarrow -x = -10 \Leftrightarrow x = 10$$

β) Έχει $10 \cdot (10-1) = 10 \cdot 9 = 90$ μαθητές

γ) Κάθε ομάδα έχει 2 παραπάνω μαθητές από την προηγούμενη ομάδα. Άρα το πλήθος μαθητών κάθε ομάδας είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega = 2$ και $\alpha_1 = 2$. Το άθροισμα των μαθητών όλων των ομάδων είναι ίσο με 90.

$$S_v = 90 \Leftrightarrow \frac{v}{2} [2\alpha_1 + (v-1) \cdot \omega] = 90 \Leftrightarrow \frac{v}{2} [2 \cdot 2 + (v-1) \cdot 2] = 90 \Leftrightarrow$$

$$2v + v^2 - v = 90 \Leftrightarrow v^2 + v - 90 = 0 \Leftrightarrow v = 9 \text{ ή } v = -10 \text{ απορρίπτεται } (v \geq 1)$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-90) = 1 + 360 = 361 = 19^2$$

$$v = \frac{-1+19}{2} = \frac{18}{2} = 9 \text{ ή } v = \frac{-1-19}{2} = \frac{-20}{2} = -10. \text{ Άρα θα δημιουργηθούν } 9 \text{ ομάδες εργασίας.}$$

33579. Οι αριθμοί : $x^2 + 5$, $x^2 + x$, $2x + 4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του αριθμού x .

β) Αν $x = 3$ και ο αριθμός $x^2 + 5$ είναι ο 4ος όρος της προόδου, να βρείτε:

i) Τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.

ii) Τον πρώτο όρο της προόδου.

iii) Το άθροισμα $S = \alpha_{15} + \alpha_{16} + \alpha_{17} + \dots + \alpha_{24}$.

Λύση

α) Αφού είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου έχουμε :

$$2(x^2 + x) = x^2 + 5 + 2x + 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - x^2 - 5 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

β) Για $x = 3$: Οι αριθμοί που δίνονται είναι οι : $\alpha_4 = 3^2 + 5 = 14$, $\alpha_5 = 3^2 + 3 = 12$, $\alpha_6 = 2 \cdot 3 + 4 = 10$

i) Η διαφορά $\omega = \alpha_5 - \alpha_4 = 12 - 14 = -2$

ii) $\alpha_4 = 14 \Leftrightarrow \alpha_1 + 3\omega = 14 \Leftrightarrow \alpha_1 + 3 \cdot (-2) = 14 \Leftrightarrow \alpha_1 - 6 = 14 \Leftrightarrow \alpha_1 = 20$

iii) $S = \alpha_{15} + \alpha_{16} + \alpha_{17} + \dots + \alpha_{24} = S_{24} - S_{14} = -72 - 98 = -170$

$$S_{24} = \frac{24}{2}(2\alpha_1 + 23\omega) = 12[2 \cdot 20 + 23 \cdot (-2)] = 12 \cdot (40 - 46) = -72$$

$$S_{14} = \frac{14}{2}(2\alpha_1 + 13\omega) = 7[2 \cdot 20 + 13 \cdot (-2)] = 7 \cdot (40 - 26) = 98$$

33581. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) , ο 3ος όρος είναι $\alpha_3 = 8$ και ο 8ος όρος είναι $\alpha_8 = 23$.

α) Να αποδείξετε ότι ο 1ος όρος της αριθμητικής προόδου είναι $\alpha_1 = 2$ και η διαφορά της $\omega = 3$.

β) Να υπολογίσετε τον 31ο όρο της.

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $S = (\alpha_1 + 1) + (\alpha_2 + 2) + (\alpha_3 + 3) + \dots + (\alpha_{31} + 31)$

Λύση

α) $\alpha_3 = 8 \Leftrightarrow \alpha_1 + 2\omega = 8$ (1) και $\alpha_8 = 23 \Leftrightarrow \alpha_1 + 7\omega = 23$ (2).

(2) - (1) $\Rightarrow 5\omega = 15 \Leftrightarrow \omega = 3$, (1) $\Rightarrow \alpha_1 + 6 = 8 \Leftrightarrow \alpha_1 = 2$

β) $\alpha_{31} = \alpha_1 + 30 \cdot \omega = 2 + 30 \cdot 3 = 2 + 90 = 92$

γ) $S = (\alpha_1 + 1) + (\alpha_2 + 2) + (\alpha_3 + 3) + \dots + (\alpha_{31} + 31) \Leftrightarrow$

$$S = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{31} + 1 + 2 + 3 + \dots + 31 = S_{31} + S'_{31} = 1457 + 496 = 1953$$

$$S_{31} = \frac{31}{2} \left(2\alpha_1 + 30 \cdot \omega \right) = 31 \cdot (2 + 15 \cdot 3) = 31 \cdot 47 = 1457. \text{ Θεωρώ την αριθμητική πρόοδο } (\beta_n) \text{ με } \beta_1 = 1 \text{ και}$$

$$\omega' = 1 \text{ (1,2,3,...v). Τότε : } 1 + 2 + 3 + \dots + 31 = S'_{31} = \frac{31}{2} (2\beta_1 + 30 \cdot \omega') = 31 \cdot (1 + 15) = 31 \cdot 16 = 496$$

33583. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_n) με $\alpha_3 = 10$ και $\alpha_{20} = 61$.

α) Να βρεθεί ο πρώτος όρος και η διαφορά της προόδου.

β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 333 είναι όρος της προόδου.

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί όροι x και y της παραπάνω προόδου (α_n) , τέτοιο ώστε να ισχύει: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$.

Λύση

α) $\alpha_3 = 10 \Leftrightarrow \alpha_1 + 2\omega = 10$ (1) και $\alpha_{20} = 61 \Leftrightarrow \alpha_1 + 19\omega = 61$ (2).

(2) - (1) $\Rightarrow 17\omega = 51 \Leftrightarrow \omega = 3$, (1) $\Rightarrow \alpha_1 + 6 = 10 \Leftrightarrow \alpha_1 = 4$

β) $\alpha_v = 333 \Leftrightarrow 4 + (v-1) \cdot 3 = 333 \Leftrightarrow 4 + 3v - 3 = 333 \Leftrightarrow 3v = 332 \Leftrightarrow v = \frac{332}{3}$. Επειδή το $\frac{332}{3}$ δεν είναι φυσικός αριθμός, δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 333.

γ) Επειδή οι x, y είναι διαδοχικοί όροι της προόδου (α_n) , είναι $y = x + 3$.

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{x+3}{3} \Leftrightarrow 3x = 2x + 6 \Leftrightarrow x = 6.$$

$$\alpha_v = x \Leftrightarrow \alpha_1 + (v-1)\omega = x \Leftrightarrow 4 + 3(v-1) = 6 \Leftrightarrow 3(v-1) = 2 \Leftrightarrow v-1 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow v = \frac{5}{3} \text{ αδύνατο, άρα δεν}$$

υπάρχουν διαδοχικοί όροι x και y της παραπάνω προόδου (α_n) , τέτοιο ώστε να ισχύει: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$.

33858. Σε αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_2 = \kappa^2$ και $\alpha_3 = (\kappa + 1)^2$, κ ακέραιος με $\kappa > 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι περιττός αριθμός.

β) Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι $\alpha_1 = 2$, τότε:

i) Να βρείτε τον αριθμό κ και να αποδείξετε ότι $\omega = 7$.

ii) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1017 είναι όρος της προόδου.

Λύση

α) $\omega = (\kappa + 1)^2 - \kappa^2 = (\cancel{\kappa} + 1 + \cancel{\kappa}) \cdot (\kappa + 1 + \kappa) = 2\kappa + 1$ περιττός

β) i) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Άρα

$$2\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3 \Leftrightarrow 2\kappa^2 = 2 + (\kappa + 1)^2 \Leftrightarrow 2\kappa^2 = 2 + \kappa^2 + 2\kappa + 1 \Leftrightarrow$$

$$\kappa^2 - 2\kappa - 3 = 0 \Leftrightarrow \kappa = -1 \text{ απορρίπτεται } (\kappa > 1) \text{ ή } \kappa = 3$$

$$\text{Άρα } \omega = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

ii) $\alpha_v = 1017 \Leftrightarrow \alpha_1 + (v-1) \cdot \omega = 1017 \Leftrightarrow 2 + (v-1) \cdot 7 = 1017 \Leftrightarrow$

$$2 + 7v - 7 = 1017 \Leftrightarrow 7v = 1022 \Leftrightarrow v = \frac{1022}{7} = 146$$

Άρα ο όρος 1007 είναι ο 146ος όρος της προόδου.

34746. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2\beta x + (\beta^2 - 4) = 0$, (1) με παράμετρο $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = \beta - 2$ και $x_2 = \beta + 2$.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2 , με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

Λύση

α) Η εξίσωση έχει $\Delta = (-2\beta)^2 - 4(\beta^2 - 4) = 4\beta^2 - 4\beta^2 + 16 = 16$ και ρίζες $x_{1,2} = \frac{2\beta \pm 4}{2} = \frac{2(\beta \pm 2)}{2} = \beta \pm 2$

β) Είναι $\beta - x_1 = \beta - \beta + 2 = 2$ και $x_2 - \beta = \beta + 2 - \beta = 2$ άρα αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με διαφορά $\omega = 2$.

36650. Ο ιδιοκτήτης ενός ταξιδιωτικού γραφείου εκτιμά ότι, όταν για μια συγκεκριμένη διαδρομή διαθέτει τα εισιτήρια στην κανονική τιμή των 21€ ανά εισιτήριο, τότε πουλά κατά μέσο όρο 30 μόνο εισιτήρια, ενώ το λεωφορείο έχει 51 θέσεις. Θέλοντας να αυξήσει τη πελατεία του, κάνει την ακόλουθη προσφορά: Ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει 3€ και κάθε επόμενος επιβάτης θα πληρώνει 0,5€ περισσότερο από τον προηγούμενο.

α) Να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος επιβάτης.

β) Αν για κάθε $v \leq 51$ ο αριθμός a_v εκφράζει το ποσό που θα πληρώσει ο v -οστός επιβάτης, να δείξετε ότι οι αριθμοί $a_1, a_2, \dots, a_{51}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τη διαφορά ω αυτής της προόδου.

γ) Αν το λεωφορείο γεμίσει, να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο 51ος επιβάτης.

δ) Να βρείτε πόσα τουλάχιστον εισιτήρια θα πρέπει να πουληθούν ώστε η είσπραξη του γραφείου με αυτή την προσφορά να ξεπερνά την είσπραξη που θα έκανε αν πουλούσε 30 εισιτήρια στην τιμή των 21€ ανά εισιτήριο. (Δίνεται ότι: $\sqrt{10201} = 101$)

Λύση

- α) Ο δεύτερος επιβάτης θα πληρώσει $3+0,5=3,5\text{€}$
 ο τρίτος επιβάτης θα πληρώσει $3,5+0,5=4\text{€}$
 ο τέταρτος επιβάτης θα πληρώσει $4+0,5=4,5\text{€}$

β) Επειδή το ποσό που πληρώνει κάθε επιβάτης είναι κατά $0,5 \text{ €}$ περισσότερο από τον προηγούμενο η (α_n) είναι αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1=3\text{€}$ και διαφορά $\omega=0,5\text{€}$

γ) Το ποσό που θα πληρώσει ο 51^{ος} επιβάτης είναι $\alpha_{51} = \alpha_1 + 50\omega = 3 + 50 \cdot 0,5 = 28\text{€}$

δ) Έστω ότι πρέπει να πουλήσει v εισιτήρια.

Τότε η είσπραξη θα είναι $S_v \text{ €}$. Οπότε :

$$S_v > 30 \cdot 21 \Leftrightarrow \frac{v}{2} \cdot [2\alpha_1 + (v-1) \cdot \omega] > 630 \Leftrightarrow \frac{v}{2} \cdot [2 \cdot 3 + (v-1) \cdot 0,5] > 630 \Leftrightarrow$$

$$2v \cdot (6 + 0,5v - 0,5) > 2520 \Leftrightarrow 12v + v^2 - v - 2520 > 0 \Leftrightarrow v^2 + 11v - 2520 > 0 \quad (1)$$

Η διακρίνουσα είναι : $\Delta = 11^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2520) = 121 + 10080 = 10201$

$$\text{Έχει ρίζες : } v = \frac{-11 + \sqrt{10201}}{2} = \frac{-11 + 101}{2} = \frac{90}{2} = 45 \text{ και } v = \frac{-11 - \sqrt{10201}}{2} = \frac{-11 - 101}{2} = \frac{-112}{2} = -56 .$$

Από την (1) $\Rightarrow (v-45)(v+56) > 0 \Leftrightarrow v-45 > 0 \Leftrightarrow v > 45$. Θα πρέπει να βγάλει τουλάχιστον 46 εισιτήρια ώστε να συμφέρει η προσφορά.

36653. Δίνεται μια αριθμητική πρόοδος (α_n) , όπου $n \in \mathbb{N}^*$. Αν οι τρεις πρώτοι όροι της προόδου είναι: $\alpha_1 = x$, $\alpha_2 = 2x^2 - 3x - 4$, $\alpha_3 = x^2 - 2$, όπου $x \in \mathbb{Z}$, τότε :

α) να αποδειχθεί ότι $x=3$.

β) να βρεθεί ο n -οστός όρος της προόδου και να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 2014 .

γ) να υπολογιστεί το άθροισμα $S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{15}$.

Λύση

α) Επειδή $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου :

$$2\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3 \Leftrightarrow 2(2x^2 - 3x - 4) = x + x^2 - 2 \Leftrightarrow 4x^2 - 6x - 8 - x - x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 7x - 6 = 0$$

Η διακρίνουσα είναι : $\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6) = 49 + 72 = 121 = 11^2$

$$\text{Οι ρίζες είναι : } x_1 = \frac{7+11}{2 \cdot 3} = \frac{18}{6} = 3, \quad x_2 = \frac{7-11}{2 \cdot 3} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z} \text{ απορρίπτεται. Επομένως } x=3.$$

β) $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 5, \alpha_3 = 7$ και $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 = 5 - 3 = 2$

$$\alpha_v = \alpha_1 + (v-1)\omega = 3 + (v-1) \cdot 2 = 3 + 2v - 2 = 2v + 1$$

$$\alpha_v = 2014 \Leftrightarrow 2v + 1 = 2014 \Leftrightarrow 2v = 2013 \text{ άτοπο (άρτιος} \neq \text{περιττός)}$$

Επομένως δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 2014

γ) $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \dots, \alpha_{15} = 3, 7, 11, \dots, 31$

Έστω η αριθμητική πρόοδος β_n , με $\beta_1 = \alpha_1 = 3, (\beta_2 = 7)$ και $\omega' = \beta_2 - \beta_1 = \alpha_3 - \alpha_1 = 7 - 3 = 4$

$$\beta_v = \beta_1 + (v-1)\omega' \Leftrightarrow \alpha_{15} = 3 + (v-1) \cdot 4 \Leftrightarrow 31 = 3 + 4v - 4 \Leftrightarrow 4v = 32 \Leftrightarrow v = 8$$

$$S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{15} = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_8 \Leftrightarrow S_8 = \frac{8}{2} \cdot (\beta_1 + \beta_8) \Leftrightarrow S_8 = 4 \cdot (3 + 31) \Leftrightarrow S_8 = 4 \cdot 34 = 136 .$$

Άρα $S=136$

36660. Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει 20 κυψέλες σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αποθήκη του Α. Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 μέτρο από την αποθήκη Α, η δεύτερη 4 μέτρα από το Α, η τρίτη 7 μέτρα από το Α και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α, 3 επιπλέον μέτρα, σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη.

α) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε το n° όρο αυτής της προόδου. Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι η διαφορά της;

β) Σε πόση απόσταση από την αποθήκη Α είναι η 20η κυψέλη;

γ) Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη Α συλλέγει το μέλι, από μία κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει πάλι πίσω στην αποθήκη Α.

ι) Ποια είναι απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την 3η κυψέλη;

ii) Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες;

Λύση

α) Κάθε κυψέλη απέχει από την προηγούμενη απόσταση 3. Άρα οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ο πρώτος όρος παριστάνει την απόσταση της 1^{ης} κυψέλης από την αποθήκη και η διαφορά την απόσταση των κυψελών μεταξύ τους. Είναι $\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega = 1 + (n-1) \cdot 3 = 1 + 3n - 3 = 3n - 2$

β) Η ζητούμενη απόσταση είναι ο όρος α_{20} με $\alpha_{20} = 3 \cdot 20 - 2 = 58 \text{ m}$

γ) ι) Η απόσταση που θα κάνει για να πάει σε κάθε κυψέλη και να επιστρέψει στην 1η αποθήκη είναι $2\alpha_n$, οπότε για να συλλέξει το μέλι από την Τρίτη κυψέλη η απόσταση που θα κάνει είναι $2\alpha_3 = 2(3 \cdot 3 - 2) = 14 \text{ μέτρα}$

ii) $2(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{20}) = 2S_{20} = 2 \cdot \frac{20}{2} (2\alpha_1 + 19\omega) = 10(2 \cdot 1 + 19 \cdot 3) = 20(2 + 57) = 20 \cdot 59 = 1180 \text{ m}$

36662. Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμιά από τις επόμενες σειρές έχει δυο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.

α) Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά.

β) Να υπολογίσετε την χωρητικότητα του σταδίου.

γ) Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την 7η μέχρι και την 14η σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου.

Λύση

α) Αφού τα καθίσματα από σειρά σε σειρά αυξάνονται κατά δύο, τότε έχουμε αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 12$ και διαφορά $\omega = 2$.

Οι σειρές του σταδίου είναι 25 (περιττός) άρα υπάρχει μεσαία σειρά και είναι η $\alpha_{\frac{25+1}{2}} = \alpha_{13}$. Θα βρούμε

πόσα καθίσματα έχει η α_{13} και η τελευταία δηλαδή η α_{25} . $\alpha_{13} = \alpha_1 + 12\omega = 12 + 12 \cdot 2 = 12 + 24 = 36$.

Άρα η μεσαία σειρά έχει 36 καθίσματα. $\alpha_{25} = \alpha_1 + 24\omega = 12 + 24 \cdot 2 = 12 + 48 = 60$

Επομένως η τελευταία σειρά έχει 60 καθίσματα.

β) Για να βρω τη χωρητικότητα του σταδίου θα προσθέσω τα καθίσματα και των 25 σειρών, δηλαδή $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{25} = S_{25}$.

$S_{25} = \frac{25}{2} (2\alpha_1 + 24\omega) = \frac{25}{2} (2 \cdot 12 + 24 \cdot 2) = 25 \cdot 36 = 900$ θέσεις έχει το στάδιο.

γ) Το πλήθος των καθισμάτων από την 7η έως την 14η σειρά δίνεται από το άθροισμα:

$$\alpha_7 + \alpha_8 + \dots + \alpha_{14} = S_{14} - S_6$$

$$S_{14} = \frac{14}{2}(2\alpha_1 + 13\omega) = 7(2 \cdot 12 + 13 \cdot 2) = 7(24 + 26) = 350 \text{ θέσεις έχουν οι 14 πρώτες σειρές.}$$

$$S_6 = \frac{6}{2}(2\alpha_1 + 5\omega) = 3(2 \cdot 12 + 5 \cdot 2) = 3(24 + 10) = 102 \text{ θέσεις έχουν οι 6 πρώτες σειρές.}$$

Άρα το πλήθος των καθισμάτων από την 7η έως την 14η σειρά είναι

$$S_{14} - S_6 = 350 - 102 = 248. \text{ Άρα το Λύκειο έχει 248 μαθητές.}$$

36674. Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς 3, 7, 11, 15,... και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4. Σταματάει όταν έχει γράψει τους 40 πρώτους από τους αριθμούς αυτούς.

α) Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να βρείτε το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών.

γ) Είναι ο αριθμός 120 ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου, από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι να εμφανιστεί ο αριθμός 235. Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος.

Λύση

α) Ναι γιατί κάθε αριθμός προκύπτει από τον προηγούμενο όταν προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό (4). Έχει πρώτο όρο τον αριθμό $\alpha_1 = 3$ και διαφορά $\omega = 4$

$$\beta) S_{40} = \frac{40}{2} \cdot (2\alpha_1 + 39\omega) = 20 \cdot (6 + 156) = 20 \cdot 162 = 3240$$

$$\gamma) \alpha_v = 120 \Leftrightarrow \alpha_1 + (v-1)\omega = 120 \Leftrightarrow 3 + (v-1)4 = 120 \Leftrightarrow$$

$$3 + 4v - 4 = 120 \Leftrightarrow 4v - 1 = 120 \Leftrightarrow 4v = 121 \Leftrightarrow v = \frac{121}{4} \notin \{1, 2, 3, \dots, 40\}$$

Άρα ο αριθμός 120 δεν είναι από αυτούς τους 40 αριθμούς.

$$\delta) \alpha_v = 235 \Leftrightarrow \alpha_1 + (v-1)\omega = 235 \Leftrightarrow 3 + (v-1)4 = 235 \Leftrightarrow$$

$$3 + 4v - 4 = 235 \Leftrightarrow 4v - 1 = 235 \Leftrightarrow 4v = 236 \Leftrightarrow v = \frac{236}{4} \Leftrightarrow v = 59$$

Ο Γιώργος έγραψε τους αριθμούς $\alpha_{41}, \alpha_{42}, \alpha_{43}, \dots, \alpha_{59}$

Θέλουμε το άθροισμα $S = \alpha_{41} + \alpha_{42} + \alpha_{43} + \dots + \alpha_{59} = S_{59} - S_{40}$

$$S_{59} = \frac{59}{2} \left(2\alpha_1 + 58\omega \right) = 59 \cdot (3 + 29 \cdot 4) = 59 \cdot (3 + 116) = 7021$$

Άρα το ζητούμενο άθροισμα είναι : $S = 7021 - 3240 = 3781$

37204. Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων. Η 1η σειρά έχει 16 καθίσματα και η 7η σειρά έχει 28 καθίσματα.

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο της και τη διαφορά αυτής της προόδου.

β) Να βρείτε το γενικό όρο της προόδου.

γ) Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο;

δ) Αν στην 1η σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη 2η υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην 3η υπάρχουν 12 κενά καθίσματα και γενικά, τα κενά καθίσματα κάθε σειράς, από τη 2η και μετά, είναι κατά 3 περισσότερα από αυτά της προηγούμενης, τότε:

i) Να βρείτε από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα.

ii) Να βρείτε πόσοι είναι οι θεατές.

Λύση

α) Το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνεται κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων. Άρα αποτελεί αριθμητική πρόοδο (α_n) με $\alpha_1=16$ καθίσματα και διαφορά ω που είναι ο αριθμός κατά τον οποίο αυξάνεται μία σειρά σε σχέση με την προηγούμενη της. Η 7η σειρά είναι ο $\alpha_7 = 28 \Leftrightarrow \alpha_1 + 6\omega = 28 \Leftrightarrow 16 + 6\omega = 28 \Leftrightarrow \omega = 2$

$$\beta) \alpha_v = \alpha_1 + (v-1)\omega \Leftrightarrow \alpha_v = 16 + (v-1) \cdot 2 \Leftrightarrow \alpha_v = 2v + 14$$

$$\gamma) S_{20} = \frac{20}{2}(2\alpha_1 + 19\omega) = 10 \cdot (2 \cdot 16 + 19 \cdot 2) = 10 \cdot (32 + 38) = 10 \cdot 70 = 700$$

δ) Το πλήθος των κενών καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου γιατί κάθε σειρά έχει 3 περισσότερα καθίσματα από την προηγούμενη της. Θεωρούμε την αριθμητική πρόοδο (β_v) του πλήθους των κενών καθισμάτων κάθε σειράς με πρώτο όρο $\beta_1 = 6$ και $\omega' = 3$ καθίσματα

$$i) \beta_v = \beta_1 + (v-1) \cdot \omega' = 6 + (v-1) \cdot 3 = 6 + 3v - 3 = 3v + 3$$

$$\text{Ισχύει } \beta_v \leq \alpha_v \Leftrightarrow 3v + 3 \leq 2v + 14 \Leftrightarrow v \leq 11.$$

Το πλήθος των κενών καθισμάτων δεν μπορεί να υπερβαίνει το πλήθος των καθισμάτων της ίδιας σειράς. Θα υπάρχουν κενά καθίσματα από την 11η σειρά και πάνω ($v=11 \Leftrightarrow \alpha_v = \beta_v$)

ii) Αν S'_{10} το σύνολο των κενών καθισμάτων των πρώτων 10 σειρών της αίθουσας τότε :

$$S'_{10} = \frac{10}{2}(2\beta_1 + 9\omega') = 5 \cdot (2 \cdot 6 + 9 \cdot 3) = 5 \cdot (12 + 27) = 195 \text{ καθίσματα}$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2\alpha_1 + 9\omega) = 5 \cdot (2 \cdot 16 + 9 \cdot 2) = 5 \cdot (32 + 18) = 250 \text{ καθίσματα}$$

Οι θεατές βρίσκονται από τη διαφορά $S_{10} - S'_{10} = 250 - 195 = 55$ θεατές

1ο θέμα

14935. α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Για οποιουδήποτε μη αρνητικούς αριθμούς α, β ισχύει: $\sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$.

- ii. Αν $\rho > 0$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $|x| < \rho \Leftrightarrow -\rho < x < \rho$.
- iii. Η εξίσωση $x^v = a$, με v περιττό φυσικό και $a < 0$, έχει λύση την $x = \sqrt[v]{a}$.
- iv. Για οποιαδήποτε συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(3,5)$ ισχύει $f(5) = 3$.
- v. Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$.
- β) Να αποδείξετε ότι ο νιοστός όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι: $\alpha_v = \alpha_1 + (v-1)\omega$.

Λύση

α) i. Λ ii. Σ iii. Λ iv. Λ v. Σ

β) Θεωρία § 5.2

Γεωμετρική πρόοδος

Θέμα 2ο

12763. Δίνεται μια πρόοδος α_n με πρώτους όρους $2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, \dots$

α) Να εξετάσετε αν η α_n είναι αριθμητική πρόοδος.

β) Να αποδείξετε ότι η α_n είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε το n -οστό της όρο.

Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αν και μόνο αν $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$. Επομένως οι αριθμοί $2, 2\sqrt{2}, 4$ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου, αν και μόνο αν $2\sqrt{2} = \frac{2+4}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{2} = 3$ που είναι άτοπο. Άρα η α_n δεν είναι αριθμητική πρόοδος.

β) Είναι $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 2\sqrt{2}, \alpha_3 = 4, \alpha_4 = 4\sqrt{2}, \dots$

Είναι $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}, \frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}, \frac{\alpha_4}{\alpha_3} = \frac{4\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}$, οπότε αποτελεί γεωμετρική πρόοδο με λόγο $\lambda = \sqrt{2}$.

Είναι $\alpha_n = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1} = 2 \cdot (\sqrt{2})^{n-1}$.

12787. α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - x - 6 = 0$.

β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο αριθμό k ώστε οι αριθμοί $k-2, k, 2k+3$ να είναι διαδοχικοί όροι σε μια γεωμετρική πρόοδο.

Λύση

α) Η εξίσωση είναι 2^{ου} βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$ και ρίζες

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{25}}{2} = 3, x_2 = \frac{1 - \sqrt{25}}{2} = -2$$

β) Οι αριθμοί $k-2, k, 2k+3$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν

$k^2 = (k-2)(2k+3) \Leftrightarrow k^2 = 2k^2 + 3k - 4k - 6 \Leftrightarrow 0 = 2k^2 - k - 6 \Leftrightarrow k^2 - k - 6 = 0$ και από το α ερώτημα προκύπτει ότι $k = 3$ ή $k = -2$. Όμως $k > 0$, άρα $k = 3$.

13319. Δίνονται οι αριθμοί $1-x, \frac{x}{2}, 2x-1, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω αριθμοί, με αυτή τη σειρά, είναι πάντοτε διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου.

β) Να βρείτε την τιμή του x , αν γνωρίζουμε ότι η διαφορά ω αυτής της προόδου είναι 5.

Λύση

α) Οι αριθμοί $1-x, \frac{x}{2}, 2x-1$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αν και μόνο αν

$$\frac{x}{2} = \frac{1-x+2x-1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{x}{2} \text{ που ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

β) Είναι $\frac{x}{2} = 1 - x + 5 \Leftrightarrow x = 2 - 2x + 10 \Leftrightarrow 3x = 12 \Leftrightarrow x = 4$.

14920. Μια γεωμετρική πρόοδος (α_n) έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = 4$, λόγο $\lambda > 0$ και $\frac{\alpha_3}{\alpha_1} = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 2$.

β) Να βρείτε τον δέκατο όρο της προόδου.

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της προόδου.

Λύση

α) $\frac{\alpha_3}{\alpha_1} = 4 \Leftrightarrow \frac{\cancel{\alpha_1} \cdot \lambda^2}{\cancel{\alpha_1}} = 4 \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda = 2$.

β) $\alpha_{10} = \alpha_1 \cdot \lambda^9 = 4 \cdot 512 = 2048$.

γ) $S_{10} = \alpha_1 \frac{\lambda^{10} - 1}{\lambda - 1} = 4 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 4 \cdot (1024 - 1) = 4092$

34156. Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_n) , για την οποία ισχύει $\frac{\alpha_5}{\alpha_2} = 27$.

α) Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 3$.

β) Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 .

Λύση

α) $\frac{\alpha_5}{\alpha_2} = 27 \Leftrightarrow \frac{\cancel{\alpha_1} \cdot \lambda^{\cancel{4}}}{\cancel{\alpha_1} \cdot \lambda^{\cancel{2}}} = 27 \Leftrightarrow \lambda^3 = 27 \Leftrightarrow \lambda = 3$

β) $S_4 = 200 \Leftrightarrow \alpha_1 \frac{\lambda^4 - 1}{\lambda - 1} = 200 \Leftrightarrow \alpha_1 \frac{3^4 - 1}{3 - 1} = 200 \Leftrightarrow$

$\alpha_1 \cdot \frac{81 - 1}{2} = 200 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \frac{40}{2} = 200 \Leftrightarrow 40\alpha_1 = 200 \Leftrightarrow \alpha_1 = 5$

34447. Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 - 5\beta x + 2\beta^2 = 0$ (1), με παράμετρο $\beta > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = 2\beta$ και $x_2 = \frac{\beta}{2}$.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2 , με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

Λύση

α) Η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα $\Delta = 25\beta^2 - 16\beta^2 = 9\beta^2$ και

$$\text{ρίζες } x_{1,2} = \frac{5\beta \pm 3\beta}{4} = \begin{cases} 2\beta \\ \frac{\beta}{2} \end{cases}.$$

β) Οι αριθμοί $2\beta, \beta, \frac{\beta}{2}$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με την σειρά που δίνονται αν και μόνον αν $\beta^2 = 2\beta \cdot \frac{\beta}{2} \Leftrightarrow \beta^2 = \beta^2$ πράγμα που ισχύει.

34874. α) Να λύσετε την εξίσωση $2x^2 - 5x + 2 = 0$ (1).

β) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί $x_1, 1, x_2$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

Λύση

α) Η (1) έχει διακρίνουσα $\Delta = 9$ και ρίζες $x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}.$

β) Είναι $x_1 = \frac{1}{2}$ και $x_2 = 2$. Οι αριθμοί $\frac{1}{2}, 1, 2$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με την σειρά που δίνονται αν και μόνον αν $1^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \Leftrightarrow 1 = 1$ πράγμα που ισχύει.

35037. Οι αριθμοί $\kappa - 2, 2\kappa$ και $7\kappa + 4, \kappa \in \mathbb{N}$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (a_n) .

α) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 4$ και να βρείτε το λόγο της προόδου.

β) i) Να εκφράσετε το 2ο όρο, τον 5ο και τον 4ο όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του a_1 .

ii) Να αποδείξετε ότι $a_2 + a_5 = 4(a_1 + a_4)$.

Λύση

α) Αφού είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου ισχύει :

$$(2\kappa)^2 = (\kappa - 2)(7\kappa + 4) \Leftrightarrow 4\kappa^2 = 7\kappa^2 + 4\kappa - 14\kappa - 8 \Leftrightarrow 3\kappa^2 - 10\kappa - 8 = 0$$

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-8) = 100 + 96 = 196 = 14^2$$

$$\kappa = \frac{10 + 14}{2 \cdot 3} = \frac{24}{6} = 4 \text{ ή } \kappa = \frac{10 - 14}{2 \cdot 3} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3} \notin \mathbb{N} \text{ απορρίπτεται}$$

Τότε έχουμε τους αριθμούς : 2, 8, 32 και ο λόγος είναι $\lambda = 8 : 2 = 4$

$$\text{β) i) } a_2 = a_1 \cdot \lambda = 4a_1, a_5 = a_1 \cdot \lambda^4 = a_1 \cdot 4^4 = 256a_1, a_4 = a_1 \cdot \lambda^3 = a_1 \cdot 4^3 = 64a_1$$

$$\text{ii) } a_2 + a_5 = 4a_1 + 256a_1 = 4(a_1 + 256a_1) = 4(a_1 + a_4)$$

35042. α) Να βρείτε, για ποιες τιμές του x , οι αριθμοί $x + 4, 2 - x, 6 - x$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

β) Αν $x = 5$ και ο $6 - x$ είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρική προόδου, να βρείτε

- i) το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου.
 ii) τον πρώτο όρο a_1 της προόδου.

Λύση

α) Αφού είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου ισχύει :

$$(2-x)^2 = (x+4)(6-x) \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + x^2 = 6x - x^2 + 24 - 4x \Leftrightarrow$$

$$2x^2 - 6x - 20 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \text{ ή } x = -2$$

β) Για $x = 5$ έχουμε τους αριθμούς : 9, -3, $1 = a_4$ και

i) ο λόγος είναι $\lambda = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$

ii) $a_4 = a_1 \cdot \lambda^3 \Leftrightarrow 1 = a_1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3 \Leftrightarrow 1 = a_1 \cdot \left(-\frac{1}{27}\right) \Leftrightarrow a_1 = -27$

35205. α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί: x , $2x+1$, $5x+4$, με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

β) Να βρείτε το λόγο λ της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, όταν:

i) $x = 1$

ii) $x = -1$

Λύση

α) Αφού είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου ισχύει :

$$(2x+1)^2 = x \cdot (5x+4) \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 5x^2 + 4x \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

β) i) Όταν $x = 1$ έχουμε αριθμούς : 1, 3, 9 και ο λόγος είναι : $\lambda = 3:1 = 3$

ii) Όταν $x = -1$ έχουμε αριθμούς : -1, -1, -1 και ο λόγος είναι : $\lambda = (-1):(-1) = 1$

35411. α) Αν οι αριθμοί $4-x$, x , 2 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x .

β) Αν οι αριθμοί $4-x$, x , 2 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x .

γ) Να βρεθεί ο αριθμός x ώστε οι αριθμοί $4-x$, x , 2 να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου.

Λύση

α) Αφού είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου ισχύει : $2x = 2 + 4 - x \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$. Τότε έχουμε τους αριθμούς : 2, 2, 2 και η διαφορά είναι $\omega = 2 - 2 = 0$.

β) Αφού είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου ισχύει :

$$x^2 = 2 \cdot (4-x) \Leftrightarrow x^2 = 8 - 2x \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -4$$

Τότε έχουμε τους αριθμούς : 2, 2, 2 και ο λόγος είναι $\lambda = \frac{2}{2} = 1$ ή τους αριθμούς : 8, -4, 2 και ο λόγος είναι

$$\lambda = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

γ) Αφού είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου ισχύει: $x = 2$.

36891. Σε γεωμετρική πρόοδο (α_n) με θετικό λόγο, ισχύει: $\alpha_3 = 1$ και $\alpha_5 = 4$.

α) Να βρείτε το λόγο της προόδου και τον πρώτο όρο της.

β) Να αποδείξετε ότι ο n -οστός όρος της προόδου είναι: $\alpha_n = 2^{n-3}$.

Λύση

$$\alpha) \alpha_3 = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \lambda^2 = 1 \quad (1), \quad \alpha_5 = 4 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \lambda^4 = 4 \quad (2)$$

$$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \frac{\cancel{\alpha_1} \cdot \lambda^4}{\cancel{\alpha_1} \cdot \lambda^2} = \frac{4}{1} \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda = 2, \quad (1) \Rightarrow \alpha_1 \cdot 2^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot 4 = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{1}{4}$$

$$\beta) \alpha_n = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1} = \frac{1}{4} \cdot 2^{n-1} = \frac{1}{2^2} \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} = 2^{n-3}$$

Θέμα 4ο

12731. Έστω πραγματικοί αριθμοί κ, λ ($\kappa \neq 0, \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$). Θεωρούμε τους αριθμούς

$$\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa \cdot \lambda.$$

α) Να αποδείξετε ότι οι τρεις αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τριών είναι πάντα διάφορο του μηδενός.

γ) Αν οι αριθμοί $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa \cdot \lambda, (\kappa > 0, \lambda \neq 0 \text{ και } \lambda \neq 1)$ είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 10x + 16 = 0$, να βρείτε τους αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa \cdot \lambda$.

Λύση

α) Οι αριθμοί $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa \cdot \lambda$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν

$$\kappa^2 = \frac{\kappa}{\lambda} \cdot (\kappa \cdot \lambda) \Leftrightarrow \kappa^2 = \frac{\kappa^2 \cdot \cancel{\lambda}}{\cancel{\lambda}} \Leftrightarrow \kappa^2 = \kappa^2 \text{ που ισχύει}$$

$$\beta) \text{ Το άθροισμα των τριών αριθμών είναι: } \frac{\kappa}{\lambda} + \kappa + \kappa \cdot \lambda = \frac{\kappa}{\lambda} + \frac{\kappa \lambda}{\lambda} + \frac{\kappa \lambda^2}{\lambda} = \frac{\kappa + \kappa \lambda + \kappa \lambda^2}{\lambda} = \frac{\kappa(1 + \lambda + \lambda^2)}{\lambda}$$

Το τριώνυμο $\lambda^2 + \lambda + 1$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$ άρα $\lambda^2 + \lambda + 1 \neq 0$ για κάθε τιμή του αριθμού λ .

$$\text{Επειδή } \kappa \neq 0, \lambda \neq 0, \text{ είναι } \frac{\kappa(1 + \lambda + \lambda^2)}{\lambda} \neq 0$$

γ) Η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 36$ και ρίζες

$$x_1 = \frac{-10 + \sqrt{36}}{2} = -2, \quad x_2 = \frac{-10 - \sqrt{36}}{2} = -8. \text{ Άρα } \left(\frac{\kappa}{\lambda} = -2 \text{ και } \kappa \lambda = -8 \right) \text{ ή } \left(\frac{\kappa}{\lambda} = -8 \text{ και } \kappa \lambda = -2 \right)$$

Αν $\frac{\kappa}{\lambda} = -2$ και $\kappa \lambda = -8$ τότε $\frac{\kappa}{\lambda} = -2 \Leftrightarrow \kappa = -2\lambda$ και με αντικατάσταση στην $\kappa \lambda = -8$ προκύπτει:

$$-2\lambda \cdot \lambda = -8 \Leftrightarrow -2\lambda^2 = -8 \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2$$

Αν $\lambda = 2$ τότε $\kappa = -2 \cdot 2 = -4$ και αν $\lambda = -2$ τότε $\kappa = -2 \cdot (-2) = 4$. Τότε οι αριθμοί $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa \cdot \lambda$ είναι οι $-2, -4, -8$ ή $-2, 4, -8$.

Αν $\frac{\kappa}{\lambda} = -8$ και $\kappa \lambda = -2$ τότε $\frac{\kappa}{\lambda} = -8 \Leftrightarrow \kappa = -8\lambda$ και με αντικατάσταση στην $\kappa \lambda = -2$ προκύπτει:

$$-8\lambda \cdot \lambda = -2 \Leftrightarrow -8\lambda^2 = -2 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \lambda = \pm \frac{1}{2}$$

Αν $\lambda = \frac{1}{2}$ τότε $\kappa = -8 \cdot \frac{1}{2} = -4$ κι αν $\lambda = -\frac{1}{2}$ τότε $\kappa = -8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 4$

Τότε οι αριθμοί $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa \cdot \lambda$ είναι οι $-8, -4, -2$ ή $-8, 4, -2$.

12998. Δίνονται οι διαδοχικοί όροι της γεωμετρικής προόδου (α_v) : $\frac{27\sqrt{3}}{2}, \frac{81}{2}, \frac{81\sqrt{3}}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι παραπάνω όροι δεν μπορούν να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

ii. $\frac{27\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{3})^7$

β) Αν $\alpha_7 = \frac{27\sqrt{3}}{2}$, να βρεθεί ο ν-οστός όρος της γεωμετρικής προόδου.

γ) Αν $\alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\lambda = \sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της

γεωμετρικής προόδου (α_v) είναι ίσο με $\frac{(\sqrt{3})^{11} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 2}$.

Λύση

α) i. Οι αριθμοί $\frac{27\sqrt{3}}{2}, \frac{81}{2}, \frac{81\sqrt{3}}{2}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αν και μόνο αν

$$\frac{81}{2} = \frac{\frac{81\sqrt{3}}{2} + \frac{27\sqrt{3}}{2}}{2} \Leftrightarrow \Leftrightarrow 81 = \frac{81\sqrt{3}}{2} + \frac{27\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 162 = 108\sqrt{3} \text{ που είναι αδύνατο, άρα δεν μπορούν να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.}$$

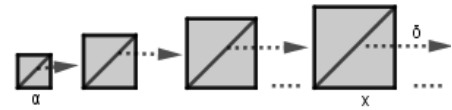
ii. $\frac{27\sqrt{3}}{2} = \frac{3^3\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}[(\sqrt{3})^2]^3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}(\sqrt{3})^6 \sqrt{3} = \frac{1}{2}(\sqrt{3})^7$

β) Η γεωμετρική πρόοδος (α_v) έχει λόγο $\lambda = \frac{\frac{81}{2}}{\frac{27\sqrt{3}}{2}} = \frac{81^3}{27\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$. Είναι

$$\alpha_7 = \frac{27\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot (\sqrt{3})^6 = \frac{1}{2}(\sqrt{3})^7 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{3})^7}{(\sqrt{3})^6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ άρα } \alpha_v = \alpha_1 \cdot \lambda^{v-1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (\sqrt{3})^{v-1} = \frac{1}{2}(\sqrt{3})^v$$

$$\gamma) S_{10} = a_1 \frac{\lambda^{10} - 1}{\lambda - 1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{(\sqrt{3})^{10} - 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3})^{11} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 2}$$

14645. Ένας ζωγράφος ξεκινώντας από ένα τετράγωνο πλευράς α , σχεδιάζει διαδοχικά τετράγωνα παίρνοντας κάθε φορά ως πλευρά του νέου τετραγώνου, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου όπως φαίνεται στο σχήμα:



α) i. Αν η πλευρά ενός τετραγώνου έχει μήκος x , να αποδείξετε ότι η διαγώνιός του δ έχει μήκος $\delta = \sqrt{2} \cdot x$.

ii. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των διαδοχικών τετραγώνων είναι όροι γεωμετρικής προόδου (α_n) με λόγο $\lambda = 2$ και γενικό όρο $\alpha_n = \alpha^2 2^{n-1}$.

β) Αν το εμβαδόν του τέταρτου κατά σειρά τετραγώνου ισούται με 8 τ.μ., να βρείτε:

i. την πλευρά α του αρχικού τετραγώνου.

ii. το πλήθος των αρχικών τετραγώνων με συνολικό εμβαδόν 255 τ.μ..

Λύση

α) i. Από το πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει ότι για τη διαγώνιο δ ενός τετραγώνου πλευράς x ισχύει:

$$\delta^2 = x^2 + x^2 \Leftrightarrow \delta = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2} \cdot x.$$

ii. Από το ερώτημα α)i) προκύπτει ότι αν ένα από τα τετράγωνα της ακολουθίας έχει πλευρά x το επόμενο του έχει πλευρά $\sqrt{2} \cdot x$ και τα αντίστοιχα εμβαδά είναι x^2 και $(\sqrt{2} \cdot x)^2 = 2x^2$. Άρα, ο λόγος λ των

εμβαδών δύο διαδοχικών τετραγώνων δίνεται από τη σχέση $\lambda = \frac{2x^2}{x^2} = 2$ και είναι σταθερός. Οπότε, τα

εμβαδά των τετραγώνων είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με λόγο $\lambda = 2$ και πρώτο όρο $\alpha_1 = \alpha^2$. Ο γενικός όρος της προόδου δίνεται από τη σχέση $\alpha_n = \alpha_1 \lambda^{n-1} = \alpha^2 2^{n-1}$.

β) Ισχύει ότι $\alpha_4 = 8 \Leftrightarrow \alpha^2 2^{4-1} = 8 \Leftrightarrow 8\alpha^2 = 8 \Leftrightarrow \alpha^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$.

γ) Το άθροισμα των n πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου δίνεται από τη σχέση:

$$S_n = a_1 \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} = 1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1.$$

Για να είναι το συνολικό εμβαδόν των αρχικών τετραγώνων ίσο με 255 τ.μ. πρέπει να ισχύει:

$S_n = 255 \Leftrightarrow 2^n - 1 = 255 \Leftrightarrow 2^n = 256 \Leftrightarrow 2^n = 2^8 \Leftrightarrow n = 8$. Άρα το πλήθος των τετραγώνων που έχουν συνολικό εμβαδόν 255τ.μ. είναι 8.

33891. Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_n) με λόγο λ για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα: $\alpha_3 = 4$, $\alpha_5 = 16$ και $\lambda > 0$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο a_1 και το λόγο λ της προόδου.

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_n) , με $\beta_n = \frac{1}{\alpha_n}$ αποτελεί επίσης γεωμετρική πρόοδο με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_n) .

γ) Αν S_{10} και S'_{10} είναι τα αθροίσματα των 10 πρώτων όρων των προόδων (α_n) και (β_n)

αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση $S'_{10} = \frac{1}{2^9} S_{10}$.

Λύση

$$\alpha) \alpha_3 = 4 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \lambda^2 = 4 \quad (1), \quad \alpha_5 = 16 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \lambda^4 = 16 \quad (2)$$

$$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \frac{\cancel{\alpha_1} \lambda^4}{\cancel{\alpha_1} \lambda^2} = \frac{16}{4} \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda = 2 (\lambda > 0), \quad (1) \Rightarrow \alpha_1 \cdot 2^2 = 4 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot 4 = 4 \Leftrightarrow \alpha_1 = 1$$

$$\beta) \frac{\beta_{v+1}}{\beta_v} = \frac{\frac{1}{\alpha_{v+1}}}{\frac{1}{\alpha_v}} = \frac{\alpha_v}{\alpha_{v+1}} = \frac{1}{\frac{\alpha_{v+1}}{\alpha_v}} = \frac{1}{2} \quad \text{Άρα η ακολουθία } (\beta_v) \text{ αποτελεί επίσης}$$

γεωμετρική πρόοδο με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_v) .

$$\gamma) \beta_1 = \frac{1}{\alpha_1} = 1, \quad S_{10} = a_1 \frac{\lambda^{10} - 1}{\lambda - 1} = 1 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 2^{10} - 1 = 1023$$

$$S'_{10} = 1 \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 1 \cdot \frac{\frac{1}{2^{10}} - 1}{\frac{1}{2} - \frac{2}{2}} = \frac{1 - 2^{10}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{2(1 - 2^{10})}{1} = -\frac{-1023}{2^9} = \frac{1023}{2^9} = \frac{1023}{2^9} = \frac{1}{2^9} \cdot 1023 = \frac{1}{2^9} \cdot S_{10}$$

34180. Δίνονται οι αριθμοί 2, x, 8 με $x > 0$.

α) Να βρείτε την τιμή του x ώστε οι αριθμοί 2, x, 8, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της προόδου;

β) Να βρείτε τώρα την τιμή του x ώστε οι αριθμοί 2, x, 8, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος λ αυτής της προόδου;

γ) Αν (α_v) είναι η αριθμητική πρόοδος 2, 5, 8, 11, ... και (β_v) είναι η γεωμετρική πρόοδος 2, 4, 8, 16, ... τότε:

i) Να βρείτε το άθροισμα S_v των v πρώτων όρων της (α_v) .

ii) Να βρείτε την τιμή του v ώστε, για το άθροισμα S_v των v πρώτων όρων της (α_v) να ισχύει: $2(S_v + 24) = \beta_7$.

Λύση

α) Αφού είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου ισχύει :

$$2x = 2 + 8 \Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x = 5$$

Τότε έχουμε τους αριθμούς : 2, 5, 8 και η διαφορά είναι $\omega = 5 - 2 = 3$

β) Αφού είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου ισχύει : $x^2 = 2 \cdot 8 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = 4$ ^{$x > 0$}

Τότε έχουμε τους αριθμούς : 2, 4, 8 και ο λόγος είναι $\lambda = \frac{4}{2} = 2$

$$\gamma) \text{ i) } S_v = \frac{v}{2} [2\alpha_1 + (v-1)\omega] = \frac{v}{2} [2 \cdot 2 + (v-1)3] = \frac{v}{2} (4 + 3v - 3) = \frac{v}{2} (3v + 1) = \frac{3v^2 + v}{2}$$

$$\text{ii) } \beta_7 = \beta_1 \cdot \lambda^6 = 2 \cdot 2^6 = 2^7 = 128$$

$$2(S_v + 24) = \beta_7 \Leftrightarrow 2 \left(\frac{3v^2 + v}{2} + 24 \right) = 128 \Leftrightarrow 3v^2 + v + 48 = 128 \Leftrightarrow 3v^2 + v - 80 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-80) = 1 + 960 = 961 = 31^2$$

$$v = \frac{-1+31}{2 \cdot 3} = \frac{30}{6} = 5 \text{ ή } v = \frac{-1-31}{2 \cdot 3} = \frac{-32}{6} = -\frac{16}{3} \text{ απορρίπτεται (} v > 0 \text{)}$$

34181. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών α , β και εμβαδόν E . Οι αριθμοί α , E , β με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του εμβαδού E .

β) Αν $E=1$ και $\alpha + \beta = 10$,

i. Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες α και β .

ii. να βρείτε τις διαστάσεις α και β του ορθογωνίου.

Λύση

α) Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών α και β έχει εμβαδόν $E = \alpha\beta$ (1). Οι αριθμοί α , E , β , με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει:

$$E^2 = \alpha\beta \Leftrightarrow E^2 = E \Leftrightarrow E = 1.$$

β) i) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε: $S = x_1 + x_2 = \alpha + \beta = 10$ και $P = x_1 x_2 = \alpha\beta = 1$. Η εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τα μήκη α και β είναι η: $x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 1 = 0$ (2)

ii) Τα α , β είναι οι λύσεις της εξίσωσης (2). Η εξίσωση (2) έχει διακρίνουσα: $\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 96$

$$\text{και ρίζες } x_1 = \frac{10 + \sqrt{96}}{2} = \frac{10 + \sqrt{16 \cdot 6}}{2} = \frac{10 + 4\sqrt{6}}{2} = \frac{2(5 + 2\sqrt{6})}{2} = 5 + 2\sqrt{6},$$

$$x_2 = \frac{10 - \sqrt{96}}{2} = \frac{10 - 4\sqrt{6}}{2} = \frac{2(5 - 2\sqrt{6})}{2} = 5 - 2\sqrt{6}$$

$$\text{Άρα } \alpha = 5 + 2\sqrt{6} \text{ και } \beta = 5 - 2\sqrt{6} \text{ ή } \alpha = 5 - 2\sqrt{6} \text{ και } \beta = 5 + 2\sqrt{6}.$$

36649. Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες 51200 βακτήρια, και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μια ώρα.

α) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες;

β) Τη χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 3200, ο οργανισμός παρουσίασε ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες. Συμβολίζουμε με β_n το πλήθος των βακτηρίων n ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης ($n \leq 5$).

i) Να δείξετε ότι η ακολουθία (β_n) είναι γεωμετρική πρόοδος, και να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της.

ii) Να εκφράσετε το πλήθος β_n των βακτηρίων συναρτήσει του n .

iii) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης;

Λύση

Επειδή ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε ώρα έχουμε γεωμετρική πρόοδο με

$$\alpha_1 = 102400 \text{ βακτήρια και } \lambda = \frac{1}{2}.$$

$$\text{α) Μετά από 6 ώρες θα έχουμε } \alpha_6 = \alpha_1 \cdot \lambda^5 = 102400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 102400 \cdot \frac{1}{32} = 3200 \text{ βακτήρια}$$

β) i) Μετά από μία ώρα θα έχουμε $3200 \cdot 3 = 9600$ βακτήρια. Επειδή ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε να τριπλασιάζεται έχουμε γεωμετρική πρόοδο με $\beta_1 = 9600$ και $\lambda = 3$

ii) $\beta_v = \beta_1 \cdot \lambda^{v-1} = 9600 \cdot 3^{v-1}$

iii) $\beta_3 = \beta_1 \cdot \lambda^2 = 9600 \cdot 9 = 86400$ βακτήρια.

36677. Μια οικογένεια, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει μεταξύ δυο προγραμμάτων που της προτείνονται: Για το πρόγραμμα Α πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 1 ευρώ, το 2ο μήνα 2 ευρώ, τον 3ο μήνα 4 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό διπλάσιο από αυτό που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα. Για το πρόγραμμα Β πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 100 ευρώ, το 2ο μήνα 110 ευρώ, τον 3ο μήνα 120 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει πρέπει να καταθέτει ποσό κατά 10 ευρώ μεγαλύτερο από εκείνο που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

α) Να βρείτε

i) το ποσό α_v που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το v^o μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Α.

ii) Να βρείτε το ποσό β_v που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το v^o μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Β.

iii) το ποσό A_v που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από v μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Α.

iv) το ποσό B_v που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από v μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Β.

β) i) Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά τους πρώτους 6 μήνες, σύμφωνα με κάθε πρόγραμμα;

ii) Αν κάθε πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε 12 μήνες, με ποιο από τα δύο προγράμματα το συνολικό ποσό που θα συγκεντρωθεί θα είναι μεγαλύτερο;

Λύση

α) Το πρόγραμμα Α περιγράφει μία γεωμετρική πρόοδο με $\alpha_1 = 1$, $\lambda = 2$. Το πρόγραμμα Β περιγράφει μία αριθμητική πρόοδο με $\beta_1 = 100$, $\omega = 10$.

i) $\alpha_v = \alpha_1 \cdot \lambda^{v-1} = 1 \cdot 2^{v-1} = 2^{v-1}$

ii) $\beta_v = \beta_1 + (v-1) \cdot \omega = 100 + (v-1) \cdot 10 = 100 + 10v - 10 = 10v + 90$

iii) $A_v = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^v - 1}{\lambda - 1} = 1 \cdot \frac{2^v - 1}{2 - 1} = 2^v - 1$

iv) $B_v = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_v = \frac{v}{2}(\beta_1 + \beta_v) = \frac{v}{2}(100 + 10v + 90) = \frac{v}{2} \left(10^5 v + 190 \right) = 5v^2 + 95v$

β) i) $A_6 = 2^6 - 1 = 64 - 1 = 63$ ευρώ (πρόγραμμα Α)

$B_6 = 5 \cdot 6^2 + 95 \cdot 6 = 180 + 570 = 750$ ευρώ (πρόγραμμα Β)

ii) $A_{12} = 2^{12} - 1 = 4096 - 1 = 4095$ ευρώ (πρόγραμμα Α)

$B_{12} = 5 \cdot 12^2 + 95 \cdot 12 = 720 + 1140 = 1860$ ευρώ (πρόγραμμα Β)

Με το πρόγραμμα Α θα συγκεντρωθεί μεγαλύτερο ποσό.

37205. Εξαιτίας ενός ατυχήματος σε διωλιστήριο πετρελαίου, διαρρέει στην θάλασσα πετρέλαιο που στο τέλος της 1ης ημέρας καλύπτει 3 τετραγωνικά μίλια (τ.μ.), στο τέλος της 2ης ημέρας καλύπτει

6 τ.μ., στο τέλος της 3ης ημέρας καλύπτει 12 τ.μ. και γενικά εξαπλώνεται έτσι, ώστε στο τέλος κάθε ημέρας να καλύπτει επιφάνεια διπλάσια από αυτήν που κάλυπτε την προηγούμενη.

α) Να βρείτε την επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος της 5^{ης} ημέρας μετά το ατύχημα.

β) Πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο θα καλύπτει 768τ.μ.;

γ) Στο τέλος της 9ης ημέρας επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός και αυτομάτως σταματάει η εξάπλωση του πετρελαίου. Στο τέλος της επόμενης ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο έχει μειωθεί κατά 6 τ.μ. και συνεχίζει να μειώνεται κατά 6 τ.μ. την ημέρα. Να βρείτε πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ.

Λύση

α) Επειδή η επιφάνεια που καλύπτει στη θάλασσα το πετρέλαιο κάθε μέρα είναι διπλάσια από την προηγούμενη ημέρα, οι αριθμοί 3, 6, 12,... που είναι τα τετραγωνικά που καλύπτει το πετρέλαιο είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με $a_1 = 3$ και $\lambda = 2$.

Στο τέλος της 5ης ημέρας η επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο είναι

$$a_5 = a_1 \cdot \lambda^4 = 3 \cdot 2^4 = 48 \text{ τ.μ.}$$

β) $a_v = 768 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^{v-1} = 768 \Leftrightarrow 2^{v-1} = \frac{768}{3} \Leftrightarrow 2^{v-1} = 256 \Leftrightarrow 2^{v-1} = 2^8$, άρα $v-1=8 \Leftrightarrow v=9$. Δηλαδή στο τέλος της 9ης ημέρας το πετρέλαιο θα καλύπτει 768τ.μ.

γ) Οι αριθμοί των τετραγωνικών μέτρων που δηλώνουν την επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο στη θάλασσα από το τέλος της 9ης ημέρας και μετά είναι: 768, 762, 756,... και αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με $\beta_1 = 762$ και $\omega = -6$. Έστω ότι τη ν-οστή ημέρα το πετρέλαιο καλύπτει 12 τ.μ. στη θάλασσα.

$$\text{Τότε } \beta_v = 12 \Leftrightarrow \beta_1 + (v-1)\omega = 12 \Leftrightarrow 762 - 6(v-1) = 12 \Leftrightarrow 762 - 6v + 6 = 12 \Leftrightarrow$$

$$762 + 6 - 12 = 6v \Leftrightarrow 6v = 756 \Leftrightarrow v = \frac{756}{6} = 126. \text{ Συνεπώς στο τέλος της 126ης ημέρας μετά την κρατική}$$

παρέμβαση και συνολικά στο τέλος της $9 + 126 = 135$ ης ημέρας μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ.

Συναρτήσεις

Η έννοια της συνάρτησης

Θέμα 2ο

12765. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

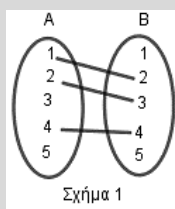
β) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης f για όποιους από τους αριθμούς $-1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 6$ είναι αυτό δυνατό.

Λύση

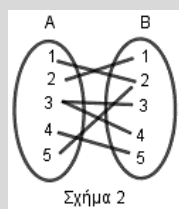
α) Για να ορίζεται η f πρέπει $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$, άρα $A_f = [2, +\infty)$

β) Επειδή το -1 δεν βρίσκεται στο πεδίο ορισμού της f , δεν υπάρχει τιμή της f στο -1 . Επειδή το $\frac{\sqrt{2}}{2}$ δεν βρίσκεται στο πεδίο ορισμού της f , δεν υπάρχει τιμή της f στο $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Είναι $f(6) = \sqrt{6-2} = \sqrt{4} = 2$.

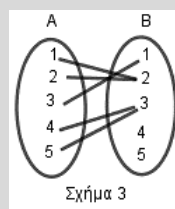
12908. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται 3 αντιστοιχίσεις από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B .



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

α) Να αιτιολογήσετε γιατί οι αντιστοιχίσεις των σχημάτων 1 και 2 δεν παριστάνουν συνάρτηση από το A στο B ενώ του σχήματος 3 παριστάνει συνάρτηση από το A στο B .

β) Αν η αντιστοίχιση του σχήματος 3 είναι η συνάρτηση f ,

i. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

ii. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το σύνολο τιμών $f(A)$ της συνάρτησης f .

iii. Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f(2)$.

Λύση

α) Η αντιστοιχία του Σχήματος 1 δεν παριστάνει συνάρτηση διότι το 5 του συνόλου A δεν αντιστοιχίζεται σε κάποιο στοιχείο του B . Η αντιστοιχία του Σχήματος 2 δεν παριστάνει συνάρτηση γιατί το 3 του συνόλου A αντιστοιχίζεται σε δύο στοιχεία του συνόλου B . Η αντιστοιχία του Σχήματος 3 παριστάνει συνάρτηση διότι κάθε στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου B .

β) i. Το πεδίο ορισμού είναι το $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

ii. Το σύνολο τιμών είναι το $f(A) = \{1, 2, 3\}$.

iii. Είναι $f(1) = f(2) = 2$.

12997. Έχουμε μπροστά μας τη λίστα με τα ονοματεπώνυμα των μαθητών ενός τμήματος της Α' λυκείου ενός Γενικού Λυκείου. Σχηματίζουμε τα σύνολα A, με στοιχεία τα μικρά ονόματα μαθητών της Α' τάξης ενός Γενικού Λυκείου και B με στοιχεία τα επώνυμα μαθητών της Α' τάξης του ίδιου Γενικού Λυκείου. Ορίζουμε την αντιστοίχιση $f: A \rightarrow B$ σύμφωνα με την οποία αντιστοιχούμε κάθε μικρό όνομα μαθητή στο επώνυμό του και την $g: B \rightarrow A$ με την οποία αντιστοιχούμε σε κάθε

επώνυμο μαθητή το μικρό του όνομα.

α) Να εξετάσετε αν η αντιστοίχιση $f: A \rightarrow B$ ορίζει πάντα συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B.

β) Να προσδιορίσετε υπό ποιες προϋποθέσεις η αντιστοίχιση $g: B \rightarrow A$ αποτελεί συνάρτηση από το σύνολο B στο σύνολο A και να προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη και ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή.

Λύση

α) Η αντιστοίχιση $f: A \rightarrow B$ δεν αποτελεί πάντα συνάρτηση από το σύνολο A στο B, καθώς μπορεί να υπάρχουν μαθητές με το ίδιο όνομα και διαφορετικό επώνυμο. Δηλαδή να αντιστοιχίζεται ένα στοιχείο του συνόλου A σε περισσότερα από ένα στοιχεία του συνόλου B.

β) Η αντιστοίχιση από το σύνολο B στο σύνολο A θα αποτελεί συνάρτηση, αν κάθε επώνυμο στο σύνολο B αντιστοιχίζεται σε μοναδικό όνομα στο σύνολο A, δηλαδή δεν υπάρχουν μαθητές με ίδιο επώνυμο. Σε αυτήν την περίπτωση η ανεξάρτητη μεταβλητή θα είναι το επώνυμο του μαθητή και η εξαρτημένη μεταβλητή θα είναι το όνομά του.

13026. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \\ 2x, & \text{αν } x \text{ ρητός} \end{cases}$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(\sqrt{2})$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

β) Αν x ρητός, να λύσετε την εξίσωση $[f(x)]^2 = 4x - 1$.

Λύση

α) Επειδή ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός, είναι $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 = 2$.

Επειδή ο $\frac{1}{2}$ είναι ρητός αριθμός, είναι $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

β) Αν x ρητός τότε: $[f(x)]^2 = 4x - 1 \Leftrightarrow (2x)^2 = 4x - 1 \Leftrightarrow$

$$4x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

13031. Δίνεται η συνάρτηση G με $G(x) = \frac{2x+3}{x-4}$.

α) Να βρείτε τις τιμές της G για $x = 2$, $x = 0$, $x = -\frac{1}{2}$.

β) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία δεν ορίζεται η συνάρτηση G.

γ) Να βρείτε την τιμή του x που αντιστοιχίζεται, μέσω της G, στο 3.

Λύση

$$\alpha) G(2) = \frac{2 \cdot 2 + 3}{2 - 4} = \frac{7}{-2} = -\frac{7}{2}, G(0) = \frac{2 \cdot 0 + 3}{0 - 4} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4} \text{ και } G\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3}{-\frac{1}{2} - 4} = \frac{2}{-\frac{9}{2}} = -\frac{4}{9}.$$

β) Η G δεν ορίζεται όταν $x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

$$\gamma) \text{ Για } x \neq 4 \text{ είναι } G(x) = 3 \Leftrightarrow \frac{2x+3}{x-4} = 3 \Leftrightarrow 2x+3 = 3x-12 \Leftrightarrow 2x-3x = -12-3 \Leftrightarrow -x = -15 \Leftrightarrow x = 15$$

13032. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 - 3x$, $g(x) = \sqrt{x+5}$.

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού των παραπάνω συναρτήσεων f και g.

β) Να δείξετε ότι $f(-1) = g(11)$.

γ) Να βρείτε την τιμή του x, ώστε $f(x) = g(4)$.

Λύση

α) Η συνάρτηση f δεν έχει περιορισμούς οπότε $A_f = \mathbb{R}$. Για να ορίζεται η συνάρτηση g πρέπει $x+5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -5$ άρα $A_g = [-5, +\infty)$.

β) Είναι $f(-1) = 1 - 3 \cdot (-1) = 1 + 3 = 4$ και $g(11) = \sqrt{11+5} = \sqrt{16} = 4$ άρα $f(-1) = g(11)$.

$$\gamma) f(x) = g(4) \Leftrightarrow 1 - 3x = \sqrt{4+5} \Leftrightarrow 1 - 3x = 3 \Leftrightarrow -3x = 3 - 1 \Leftrightarrow -3x = 2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}.$$

14681. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 0 \\ 2x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης $f(3)$ και $f(-3)$.

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f(x) = 8$.

Λύση

$$\alpha) f(3) = 2 \cdot 3 + 2 = 6 + 2 = 8 \text{ και } f(-3) = (-3)^2 - 1 = 9 - 1 = 8$$

$$\beta) \text{ Για } x < 0 \text{ είναι } f(x) = 8 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 9 \stackrel{x < 0}{\Leftrightarrow} x = -3$$

$$\text{Για } x \geq 0 \text{ είναι } f(x) = 8 \Leftrightarrow 2x + 2 = 8 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$$

14728. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 0 \\ x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης $f(-1)$ και $f(1)$.

β) Για $x \geq 0$ να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq 2$.

Λύση

$$\alpha) f(-1) = 2(-1) - 1 = -2 - 1 = -3, f(1) = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2.$$

β) Για κάθε $x \geq 0$ είναι $f(x) \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$.

14781. Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών μιας αντιστοίχισης $x \rightarrow y$ με το x να παίρνει μόνο τις τιμές: $-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1$ και 3 .

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	3
y	0	-4	-6	$-\frac{25}{4}$	-6	0

α) i. Να αιτιολογήσετε γιατί η παραπάνω αντιστοίχιση $x \rightarrow y$ είναι συνάρτηση.

ii. Είναι η αντιστοίχιση $y \rightarrow x$ συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης $x \rightarrow y$.

Λύση

α) i. Η αντιστοίχιση $x \rightarrow y$ είναι συνάρτηση γιατί κάθε τιμή του x αντιστοιχεί σε μια μόνο τιμή του y .

ii. Η αντιστοίχιση $y \rightarrow x$ δεν είναι συνάρτηση γιατί οι τιμές -6 του y αντιστοιχίζονται σε δύο τιμές του x .

β) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A = \left\{ -2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1, 3 \right\}$ και το σύνολο τιμών της είναι το

$$B = \left\{ -6, -4, 0, -\frac{25}{4} \right\}.$$

34446. Η απόσταση y (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μια πόλη A , μετά από x λεπτά, δίνεται από τη σχέση: $y = 35 + 0,8x$.

α) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη A μετά από 25 λεπτά;

β) Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη A ;

Λύση

α) $y = 35 + 0,8 \cdot 25 = 35 + 20 = 55 \text{ km}$

β) $75 = 35 + 0,8x \Leftrightarrow 0,8x = 40 \Leftrightarrow x = 50 \text{ min}$

35298. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & x < 0 \\ x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-1) = f(3)$.

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x) = 0$.

Λύση

α) $f(-1) = 2(-1) + 4 = -2 + 4 = 2$, $f(3) = 3 - 1 = 2$, $f(-1) = f(3)$

β) Για $x < 0$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2 < 0$ δεκτή

Για $x \geq 0$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 > 0$ δεκτή

35405. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x+2}{x^2-x-6}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να δείξετε ότι: $f(2) + f(4) = 0$.

Λύση

α) Πρέπει $x^2 - x - 6 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$ και $x \neq -2$, άρα: $A_f = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$

$$\text{β) } f(x) = \frac{x+2}{x^2-x-6} = \frac{\cancel{x+2}}{(\cancel{x+2})(x-3)} = \frac{1}{x-3}, \quad f(2) + f(4) = \frac{1}{2-3} + \frac{1}{4-3} = -1 + 1 = 0$$

37170. Η θερμοκρασία T σε βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$), σε βάθος x χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης, δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση: $T = 15 + 25 \cdot x$, όταν $0 \leq x \leq 200$.

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία ενός σημείου που βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να βρείτε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι ίση με 290°C . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Σε ποιο βάθος μπορεί να βρίσκεται ένα σημείο, στο οποίο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 440°C ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) Για να βρούμε τη θερμοκρασία ενός σημείου που βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης θέτουμε στη δοθείσα σχέση $x = 30$ και βρίσκουμε ισοδύναμα: $T = 15 + 25 \cdot 30 = 15 + 750 = 765^{\circ}\text{C}$

β) Για να βρούμε σε ποιο βάθος η θερμοκρασία είναι ίση με 290°C θέτουμε στη δοθείσα σχέση $T = 290$ και βρίσκουμε ισοδύναμα:

$$290 = 15 + 25 \cdot x \Leftrightarrow 275 = 25x \Leftrightarrow x = 11 \text{ χιλιόμετρα}$$

γ) Για να βρούμε σε ποιο βάθος η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 440°C λύνουμε την ανίσωση:

$$T > 440 \Leftrightarrow 15 + 25 \cdot x > 440 \Leftrightarrow 25 \cdot x > 425 \Leftrightarrow x > 17 \text{ χιλιόμετρα}$$

Επομένως η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη των 440°C σε βάθος άνω των 17 χιλιομέτρων.

37175. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \begin{cases} 8-x, & \text{αν } x < 0 \\ 2x+5, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι: $f(-5) = f(4)$.

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x) = 9$.

Λύση

$$\text{α) } f(-5) = 8 - (-5) = 8 + 5 = 13, \quad f(4) = 2 \cdot 4 + 5 = 8 + 5 = 13, \quad \text{άρα } f(-5) = f(4).$$

β) Για $x < 0$: $f(x) = 9 \Leftrightarrow 8 - x = 9 \Leftrightarrow x = -1 > 0$ δεκτή

Για $x \geq 0$: $f(x) = 9 \Leftrightarrow 2x + 5 = 9 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2 < 0$ δεκτή

37185. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - 16x}{x - 4}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι, για τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει $f(x) = x^2 + 4x$.

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 32$.

Λύση

α) Πρέπει $x - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 4$, άρα $A_f = \mathbb{R} - \{4\}$

$$f(x) = \frac{x^3 - 16x}{x - 4} = \frac{x(x^2 - 16)}{x - 4} = \frac{x(x-4)(x+4)}{x-4} = x(x+4) = x^2 + 4x$$

β) $f(x) = 32 \Leftrightarrow x^2 + 4x = 32 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 32 = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x = -8$ (δεκτή) ή $x = 4$ (απορρίπτεται)

37189. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}, x \neq 0$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) - f(2)$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{5}{2}$.

Λύση

$$\alpha) A = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) - f(2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}} + 1 + \frac{1}{1} - \left(2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 2 + 1 + 1 - 2 - \frac{1}{2} = 2$$

$$\beta) f(x) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 2 = 5x \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9, x_1 = \frac{5+3}{2 \cdot 2} = \frac{8}{4} = 2 \text{ και } x_2 = \frac{5-3}{2 \cdot 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

37202.α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-2}{x^2 - 5x + 6}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης.

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = \frac{1}{x-3}$.

Λύση

$$\alpha) \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1, x_1 = \frac{5+1}{2} = 3, x_2 = \frac{5-1}{2} = 2.$$

$$\text{Άρα } x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

β) i) Πρέπει $x^2 - 5x + 6 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ και $x \neq 3$, άρα $A = \mathbb{R} - \{2, 3\}$

$$\text{ii) } f(x) = \frac{x-2}{x^2-5x+6} = \frac{\cancel{x-2}}{(\cancel{x-2})(x-3)} = \frac{1}{x-3}$$

Θέμα 4ο

12689. Ένα ελικόπτερο απογειώνεται από το ελικοδρόμιο και το ύψος του $Y_1(t)$, σε μέτρα, από την επιφάνεια της θάλασσας τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση: $Y_1(t) = 150 + 50t$, $t \in [0, 5]$.

Τα επόμενα πέντε λεπτά κινείται σε σταθερό ύψος και στη συνέχεια κατεβαίνει αργά για δέκα λεπτά ακόμα, μέχρι να επιστρέψει στο ελικοδρόμιο. Το ύψος του από την επιφάνεια της θάλασσας τα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση: $Y_2(t) = 650 - 25t$.

- α)** Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας βρίσκεται το ελικοδρόμιο;
β) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας πετάει το ελικόπτερο από το 5^ο μέχρι το 10^ο λεπτό της κίνησής του;
γ) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $Y_2(t)$, και να προσδιορίσετε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες η απόσταση του ελικοπτερου από τη θάλασσα είναι 250 μέτρα.
δ) i. Στα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του, πόσα μέτρα ανεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει;
ii. Στα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του πόσα μέτρα κατεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει;

Λύση

α) Το ελικόπτερο βρίσκεται στο ελικοδρόμιο την χρονική στιγμή $t = 0$ και το ύψος του από την επιφάνεια της θάλασσας είναι $Y_1(0) = 150 + 50 \cdot 0 = 150$ μέτρα.

β) Μετά από 5 λεπτά, το ελικόπτερο θα βρίσκεται σε ύψος $Y_1(5) = 150 + 50 \cdot 5 = 400$ μέτρα πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας. Άρα θα πετάει σταθερά στο ύψος αυτό για χρόνο $t \in [5, 10]$.

γ) Το ελικόπτερο κατεβαίνει από το 10^ο λεπτό μέχρι να φτάσει πάλι στο ελικοδρόμιο. Θα φτάσει στο ελικοδρόμιο μετά από 10 λεπτά, επομένως το πεδίο ορισμού της $Y_2(t)$ είναι το διάστημα $[10, 20]$. Σε ύψος 250 μέτρων από την επιφάνεια της θάλασσας θα βρίσκεται και όταν ανεβαίνει και όταν επιστρέφει στο ελικοδρόμιο. Δηλαδή θα βρούμε τη χρονική στιγμή κατά την οποία:

$$Y_1(t) = 250 \Leftrightarrow 150 + 50t = 250 \Leftrightarrow t = 2 \text{ λεπτά και } Y_2(t) = 250 \Leftrightarrow 650 - 25t = 250 \Leftrightarrow t = 16 \text{ λεπτά}$$

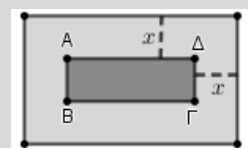
δ) i. Όταν ανεβαίνει το ελικόπτερο, παρατηρούμε ότι κάθε λεπτό που περνάει (μέχρι το 5^ο λεπτό της κίνησής του) το ύψος του από την επιφάνεια της θάλασσας αυξάνει σταθερά κατά 50 μέτρα, αφού:

$$Y_1(t+1) - Y_1(t) = [150 + 50(t+1)] - (150 + 50t) = 50 \text{ μέτρα.}$$

ii. Όταν επιστρέφει το ελικόπτερο στη βάση του, παρατηρούμε ότι κάθε λεπτό που περνάει (από το 10^ο μέχρι το 20^ο λεπτό της κίνησής του) το ύψος του από την επιφάνεια της θάλασσας μειώνεται σταθερά κατά 25 μέτρα, αφού: $Y_2(t+1) - Y_2(t) = [650 - 25(t+1)] - (650 - 25t) = -25 \text{ μέτρα.}$

12911. Ένα δημοτικό κολυμβητήριο έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με διαστάσεις 15m και 25m.

Ο δήμος, για λόγους ασφάλειας, θέλει να κατασκευάσει γύρω από το κολυμβητήριο μια πλακοστρωμένη ζώνη με σταθερό πλάτος x m ($x > 0$), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της ζώνης δίνεται από τη σχέση: $E(x) = 4x^2 + 80x$, $x > 0$.

β) Να βρεθεί το πλάτος x της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδό $E = 500 \text{ m}^2$.

γ) Ποιο μπορεί να είναι το πλάτος της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν μικρότερο από 500 m^2 ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) Το κολυμβητήριο ΑΒΓΔ έχει εμβαδό $(ΑΒΓΔ) = 15 \cdot 25 \text{ m}^2 = 375 \text{ m}^2$. Το ορθογώνιο που δημιουργείται εξωτερικά του κολυμβητηρίου έχει μήκος $25 + 2x \text{ m}$ και πλάτος $15 + 2x \text{ m}$, οπότε έχει εμβαδό

$$E = (15 + 2x)(25 + 2x) = 375 + 30x + 50x + 4x^2 = 4x^2 + 80x + 375 \text{ m}^2$$

Το εμβαδό της πλακόστρωτης ζώνης γύρω από το κολυμβητήριο είναι

$$E(x) = E - (ΑΒΓΔ) = 4x^2 + 80x + 375 - 375 = 4x^2 + 80x, x > 0$$

β) $E(x) = 500 \Leftrightarrow 4x^2 + 80x = 500 \Leftrightarrow 4x^2 + 80x - 500 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 20x - 125 = 0$. Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με $\Delta = 900$ και ρίζες $x = 5$ δεκτή ή $x = -25$ απορρίπτεται

γ) $E(x) < 500 \Leftrightarrow 4x^2 + 80x < 500 \Leftrightarrow 4x^2 + 80x - 500 < 0 \Leftrightarrow x^2 + 20x - 125 < 0 \Leftrightarrow x \in (-25, 5)$. Όμως $x > 0$ άρα $x \in (0, 5)$.

13114. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x-1| - |3-3x| + |2x-4|}{2}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = d(x, 2) - d(x, 1)$.

β) Αν τα σημεία Α και Β παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς 1 και 2, να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της εξίσωσης $f(x) = 0$ και να προσδιορίσετε τη λύση της.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

Λύση

$$\begin{aligned} \alpha) f(x) &= \frac{|x-1| - |3-3x| + |2x-4|}{2} = \frac{|x-1| - |-3(x-1)| + |2(x-2)|}{2} = \frac{|x-1| - 3|x-1| + 2|x-2|}{2} = \\ &= \frac{2|x-2| - 2|x-1|}{2} = \frac{2(|x-2| - |x-1|)}{2} \Leftrightarrow f(x) = |x-2| - |x-1| = d(x, 2) - d(x, 1) \end{aligned}$$

β) Είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow d(x, 2) - d(x, 1) = 0 \Leftrightarrow d(x, 2) = d(x, 1)$

Αν Μ το σημείο του άξονα που αντιστοιχεί στη λύση x της παραπάνω εξίσωσης, αυτό θα πρέπει να ισαπέχει από τα σημεία Α και Β και κατά συνέπεια θα είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ. Άρα $x = \frac{3}{2}$.

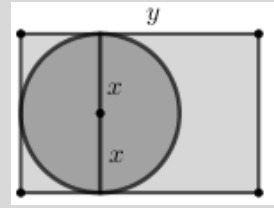
$$\gamma) f(x) = 0 \Leftrightarrow |x-2| - |x-1| = 0 \Leftrightarrow |x-2| = |x-1| \Leftrightarrow$$

$$(x-2 = x-1 \Leftrightarrow -2 = -1 \text{ αδύνατη}) \text{ ή } \left(x-2 = -x+1 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \right)$$

14122. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ορθογώνιο με μήκος y cm και περίμετρο 10 cm. Μέσα σε αυτό δίνεται κύκλος με ακτίνα x cm, ο οποίος εφάπτεται στις τρεις πλευρές του ορθογωνίου.

α) i. Να αποδείξετε ότι η σχέση που εκφράζει το μήκος y (σε cm) του ορθογωνίου ως συνάρτηση της ακτίνας x του κύκλου είναι:

$$y = 5 - 2x, \quad x \in \left(0, \frac{5}{2}\right).$$



ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου (σε cm^2) δίνεται από τη σχέση

$$E_{\text{ορθ}} = 10x - 4x^2, \quad x \in \left(0, \frac{5}{2}\right).$$

β) Να αποδείξετε ότι το μέρος του εμβαδού του ορθογωνίου (σε cm^2) που

βρίσκεται έξω από τον κύκλο δίνεται από τη σχέση: $E = 10x - (\pi + 4)x^2$, $x \in \left(0, \frac{5}{2}\right)$.

γ) Αν το εμβαδό E του ορθογωνίου που βρίσκεται έξω από τον κύκλο είναι ίσο με $(6 - \pi)\text{cm}^2$ και ο x είναι ένας ρητός αριθμός, τότε να βρείτε:

i. την ακτίνα x του κύκλου.

ii. τις διαστάσεις του ορθογωνίου.

Λύση

α) i. Επειδή το ορθογώνιο έχει περίμετρο 10cm, ισχύει :

$$2 \cdot 2x + 2y = 10 \Leftrightarrow 2(2x + y) = 10 \Leftrightarrow 2x + y = \frac{10}{2} \Leftrightarrow y = 5 - 2x.$$

$$\text{Είναι } x > 0 \text{ και } y > 0 \Leftrightarrow 5 - 2x > 0 \Leftrightarrow -2x > -5 \Leftrightarrow x < \frac{5}{2}, \text{ άρα } x \in \left(0, \frac{5}{2}\right).$$

ii. Είναι $E = 2x \cdot y = 2x(5 - 2x) = 10x - 4x^2$, $x \in \left(0, \frac{5}{2}\right)$.

β) Ο κύκλος έχει εμβαδό πx^2 , οπότε το μέρος του εμβαδού του ορθογωνίου (σε cm^2) που βρίσκεται έξω από τον κύκλο δίνεται από τη σχέση: $E = 10x - 4x^2 - \pi x^2 = 10x - (\pi + 4)x^2$, $x \in \left(0, \frac{5}{2}\right)$.

γ) i. Είναι $E = 6 - \pi \Leftrightarrow 10x - (\pi + 4)x^2 = 6 - \pi \Leftrightarrow (\pi + 4)x^2 - 10x + (6 - \pi) = 0$

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με διακρίνουσα

$$\Delta = 100 - 4(\pi + 4)(6 - \pi) = 100 - 24\pi + 4\pi^2 - 96 + 16\pi \Leftrightarrow \Delta = 4\pi^2 - 8\pi + 4 = 4(\pi - 1)^2 \text{ και ρίζες}$$

$$x = \frac{10 + 2(\pi - 1)}{2(\pi + 4)} = \frac{10 + 2\pi - 2}{2(\pi + 4)} = \frac{8 + 2\pi}{2(\pi + 4)} = \frac{2(\pi + 4)}{2(\pi + 4)} = 1 \text{ ή}$$

$$x = \frac{10 - 2(\pi - 1)}{2(\pi + 4)} = \frac{10 - 2\pi + 2}{2(\pi + 4)} = \frac{12 - 2\pi}{2(\pi + 4)} = \frac{2(6 - \pi)}{2(\pi + 4)} = \frac{6 - \pi}{\pi + 4} \text{ που απορρίπτεται γιατί δεν είναι ρητός}$$

αριθμός. Άρα η ακτίνα του κύκλου είναι 1cm.

ii. Οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι $2x = 2 \text{ cm}$ και $y = 5 - 2 = 3 \text{ cm}$.

14375. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \mu x - 2$, $\mu \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι αριθμοί $x = -2$ και $x = 3$ βρίσκονται εκτός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$, ενώ ο $x = 1$ βρίσκεται εντός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

γ) Αν επιπλέον οι τιμές $f(-2)$, $f(1)$, $f(3)$ με τη σειρά που δίνονται αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου τότε:

i. Να βρείτε τις τιμές του μ .

ii. Για $\mu = \frac{13}{7}$ να βρείτε το λόγο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου.

Λύση

α) Η f είναι τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta = \mu^2 + 8 > 0$ άρα η f έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.

β) Αν τα $x = -2$ και $x = 3$ βρίσκονται εκτός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$, τότε $(f(-2) > 0 \Leftrightarrow 4 + 2\mu - 2 > 0 \Leftrightarrow 2\mu > -2 \Leftrightarrow \mu > -1 \text{ (1)})$ και $(f(3) > 0 \Leftrightarrow 9 - 3\mu - 2 > 0 \Leftrightarrow -3\mu > -7 \Leftrightarrow \mu < \frac{7}{3} \text{ (2)})$.

Επειδή ο $x = 1$ βρίσκεται εντός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$, είναι $f(1) < 0 \Leftrightarrow 1 - \mu - 2 < 0 \Leftrightarrow \mu > -1 \text{ (3)}$

Με συναλήθευση των (1), (2), (3) είναι $\mu \in \left(-1, \frac{7}{3}\right)$.

γ) i. $f(-2) = 2 + 2\mu$, $f(1) = -1 - \mu$, $f(3) = 7 - 3\mu$

Οι τιμές $f(-2)$, $f(1)$, $f(3)$ με τη σειρά που δίνονται αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν $f^2(1) = f(3)f(-2) \Leftrightarrow (-1 - \mu)^2 = (7 - 3\mu)(2 + 2\mu) \Leftrightarrow 1 + 2\mu + \mu^2 = 14 + 14\mu - 6\mu - 6\mu^2 \Leftrightarrow 7\mu^2 - 6\mu - 13 = 0$. Η τελευταία είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 400$ και ρίζες $\mu = -1$, $\mu = \frac{13}{7}$.

ii. Για $\mu = \frac{13}{7}$ είναι $f(-2) = 2 + 2 \cdot \frac{13}{7} = \frac{40}{7}$, $f(1) = -1 - \frac{13}{7} = -\frac{20}{7}$

Είναι $\lambda = \frac{-\frac{20}{7}}{\frac{40}{7}} = -\frac{1}{2}$

14562. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2}$.

α) i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

ii. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x}{x-2}$ για κάθε $x \in A$.

β) Να εξετάσετε αν η ευθεία $y = 1$ έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της $|f(x)|$.

Λύση

α) i. Η f ορίζεται όταν $x^2 - 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ και $x \neq 2$, άρα $A = \mathbb{R} - \{1, 2\}$.

ii. Είναι $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x}{x-2}$

β) $|f(x)| \Leftrightarrow \left| \frac{x}{x-2} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|x|}{|x-2|} = 1 \Leftrightarrow |x| = |x-2| \Leftrightarrow (x = x-2 \text{ αδύνατη}) \text{ ή}$

$(x = -x + 2 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1 \text{ απορρίπτεται})$

Άρα η ευθεία $y = 1$ δεν έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της $|f(x)|$.

14629. Σε μια γραπτή εξέταση 100 ερωτήσεων Σ-Λ (Σωστό - Λάθος) σε κάποιο Πανεπιστήμιο, κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 1 μονάδα και κάθε λανθασμένη απάντηση βαθμολογείται με $-\frac{1}{3}$ της μονάδας (για κάθε τριάδα λανθασμένων απαντήσεων αφαιρείται μια μονάδα).

α) Να αποδείξετε ότι αν ένας φοιτητής απαντήσει σωστά σε x από τις 100 ερωτήσεις, τότε η βαθμολογία του $E(x)$ δίνεται από τον τύπο: $E(x) = \frac{4}{3}(x - 25)$.

β) Ένας φοιτητής βαθμολογήθηκε με 88. Πόσες ήταν οι σωστές και πόσες οι λανθασμένες απαντήσεις που έδωσε;

γ) Να αποδείξετε ότι η βαθμολογία ενός φοιτητή δεν μπορεί να είναι ίση με 50. Πόσες σωστές απαντήσεις πρέπει να δώσει ένας φοιτητής για να πάρει βαθμολογία μεγαλύτερη από τη βάση που είναι 50;

δ) Το άθροισμα των επιδόσεων δυο φοιτητών ήταν 140. Πόσες ήταν οι λανθασμένες απαντήσεις και των δυο μαζί;

Λύση

α) Αν το πλήθος των σωστών απαντήσεων είναι x , τότε το πλήθος των λανθασμένων απαντήσεων είναι $100 - x$. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, ο φοιτητής θα πάρει x βαθμούς για τις σωστές απαντήσεις και θα του αφαιρεθούν (αρνητική βαθμολογία) $\frac{1}{3}(100 - x)$ βαθμοί για τις λανθασμένες απαντήσεις. Έτσι, η τελική βαθμολογία του θα είναι

$$E(x) = x - \frac{1}{3}(100 - x) = \frac{3x - 100 + x}{3} = \frac{4x - 100}{3} = \frac{4}{3}(x - 25) \text{ όπου } x \text{ είναι το πλήθος των σωστών απαντήσεων.}$$

β) $E(x) = 88 \Leftrightarrow \frac{4}{3}(x - 25) = 88 \Leftrightarrow 4x - 100 = 264 \Leftrightarrow 4x = 364 \Leftrightarrow x = 91$

Άρα ο φοιτητής που βαθμολογήθηκε με 88, απάντησε σωστά σε 91 ερωτήσεις και λανθασμένα σε 9 ερωτήσεις.

γ) Έστω ότι η βαθμολογία ενός φοιτητή που απάντησε σωστά σε x ερωτήσεις είναι ίση με 50. Τότε έχουμε: $E(x) = 50 \Leftrightarrow \frac{4}{3}(x - 25) = 50 \Leftrightarrow 4x - 100 = 150 \Leftrightarrow 4x = 250 \Leftrightarrow x = \frac{125}{2} = 62,5$ που είναι

άτοπο, αφού ο αριθμός x που παριστάνει το πλήθος των σωστών απαντήσεων, είναι ακέραιος. Επομένως η βαθμολογία ενός φοιτητή δεν μπορεί να είναι ίση με 50. Ένας φοιτητής θα πάρει βαθμολογία μεγαλύτερη από τη βάση, μόνο όταν

$$E(x) > 50 \Leftrightarrow \frac{4}{3}(x - 25) > 50 \Leftrightarrow 4x - 100 > 150 \Leftrightarrow 4x > 250 \Leftrightarrow x > \frac{125}{2} = 62,5$$

Επομένως η βαθμολογία ενός φοιτητή είναι μεγαλύτερη του 50 μόνο όταν απαντήσει σωστά σε 63 τουλάχιστον ερωτήσεις.

δ) Έστω ότι το πλήθος των σωστών απαντήσεων των φοιτητών είναι x_1, x_2 αντίστοιχα. Τότε έχουμε:

$$E(x_1) + E(x_2) = 140 \Leftrightarrow \frac{4}{3}(x_1 - 25) + \frac{4}{3}(x_2 - 25) = 140 \Leftrightarrow$$

$$4x_1 - 100 + 4x_2 - 100 = 420 \Leftrightarrow 4(x_1 + x_2) = 620 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 155$$

Επομένως οι δυο φοιτητές απάντησαν σωστά σε 155 από τις 200 ερωτήσεις τους και λανθασμένα στις υπόλοιπες $200 - 155 = 45$ ερωτήσεις

14655. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x και y τέτοια, ώστε $x + y = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του ορθογωνίου τριγώνου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο $E(x) = \frac{1}{2}(10x - x^2)$, $x \in (0, 10)$.

β) i. Να αποδείξετε ότι $E(x) \leq \frac{25}{2}$ για κάθε $x \in (0, 10)$.

ii. Για ποια τιμή του x το εμβαδόν γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$;

γ) Αν $x = 5$, ποιο συμπέρασμα προκύπτει για το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές του;

Λύση

α) Είναι $x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x$.

$$\text{Πρέπει } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 10 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 10 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 10.$$

Το εμβαδόν του τριγώνου συναρτήσει του x είναι $E(x) = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}x(10 - x) = \frac{1}{2}(-x^2 + 10x)$, $0 < x < 10$

β) i. $E(x) \leq \frac{25}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(-x^2 + 10x) \leq \frac{25}{2} \Leftrightarrow -x^2 + 10x \leq 25 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 5)^2 \geq 0$ ισχύει για κάθε $0 < x < 10$.

ii. Είναι $E(x) = \frac{25}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(-x^2 + 10x) = \frac{25}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 10x = 25 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = 0 \Leftrightarrow (x - 5)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

γ) Για $x = 5$ είναι $y = 10 - 5 = 5$ άρα είναι $x = y = 5$. Επομένως το $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

14702. Για της ανάγκες ενός αρχιτεκτονικού σχεδίου ενός κτηρίου, απαιτείται η κατασκευή μιας μακέτας ενός πάρκου, σχήματος ορθογώνιου ΑΒΓΔ, με διαστάσεις x και $2x - 1$, όπου $x > \frac{1}{2}$.

- α) Να εκφράσετε την περίμετρο Π και το εμβαδόν E της μακέτας σε συνάρτηση του x .
 β) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνονται οι διαστάσεις της μακέτας, ώστε η περιφραξη του πάρκου στη μακέτα, να μη ξεπερνά τα 8 μέτρα.
 γ) Να βρείτε τις τιμές του x , ώστε το εμβαδόν της μακέτας, να είναι το πολύ 1 τετραγωνικό μέτρο.

Λύση

α) Η περίμετρος του ορθογώνιου είναι

$$\Pi = 2x + 2(2x - 1) = 2x + 4x - 2 = 6x - 2, \quad x > \frac{1}{2}.$$

Το εμβαδόν E του ορθογώνιου είναι $E = x(2x - 1) = 2x^2 - x, \quad x > \frac{1}{2}$.

β) Είναι $\Pi \leq 8 \Leftrightarrow 6x - 2 \leq 8 \Leftrightarrow 6x \leq 10 \Leftrightarrow x \leq \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$. Τότε $2x \leq 2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow 2x - 1 \leq \frac{10}{3} - 1 \Leftrightarrow 2x - 1 \leq \frac{7}{3}$

Επειδή $x > \frac{1}{2}$, για τις διαστάσεις του ορθογώνιου ισχύει ότι $\frac{1}{2} < x \leq \frac{5}{3}$ και $0 < 2x - 1 \leq \frac{7}{3}$.

γ) Το εμβαδόν της μακέτας, να είναι το πολύ 1 τετραγωνικό μέτρο όταν

$$E \leq 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x \leq 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 \leq 0.$$

Το τριώνυμο $2x^2 - x - 1$ έχει ρίζες $-\frac{1}{2}$ και 1, και με βάση τον

x	$-\infty$	$-1/2$	1	$+\infty$	
$2x^2 - x - 1$	+	0	-	0	+

διπλανό πίνακα προσήμου, προκύπτει ότι $2x^2 - x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$. Όμως $x > \frac{1}{2}$, άρα $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$.

14759. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 + 6\alpha x + 6\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $f(\alpha) + f(\beta) \geq \beta^2 - 36$.

β) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες $f(\alpha) + f(\beta) = \beta^2 - 36$.

γ) Αν $\alpha = 2$ και $\beta = -6$:

i. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 6x$.

ii. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος γι), να δείξετε ότι ισχύει: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{6}$.

Λύση

$$\alpha) f(\alpha) + f(\beta) \geq \beta^2 - 36 \Leftrightarrow 3\alpha^2 + 6\alpha^2 + 6\beta + 3\beta^2 + 6\alpha\beta + 6\beta \geq \beta^2 - 36 \Leftrightarrow$$

$$9\beta^2 + 2\beta^2 + 6\alpha\beta + 12\beta + 36 \geq 0 \Leftrightarrow (9\alpha^2 + 6\alpha\beta + \beta^2) + (\beta^2 + 12\beta + 36) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(3\alpha + \beta)^2 + (\beta + 6)^2 \geq 0 \text{ ισχύει γιατί } (3\alpha + \beta)^2 \geq 0 \text{ και } (\beta + 6)^2 \geq 0.$$

$$\beta) f(\alpha) + f(\beta) = \beta^2 - 36 \Leftrightarrow (3\alpha + \beta)^2 + (\beta + 6)^2 = 0 \Leftrightarrow (3\alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow 3\alpha = -\beta(1)) \text{ και}$$

$$(\beta + 6 = 0 \Leftrightarrow \beta = -6).$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $3\alpha = 6 \Leftrightarrow \alpha = 2$.

γ) Για $a = 2$ και $\beta = -6$ είναι $f(x) = 3x^2 + 12x - 36$.

i. $f(x) = 6x \Leftrightarrow 3x^2 + 12x - 36 = 6x \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 36 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{13}$

ii. Από τους τύπους Vieta είναι $S = x_1 + x_2 = -2$ και $P = x_1 x_2 = -12$.

Είναι $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2}{x_1 x_2} + \frac{x_1}{x_1 x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{-2}{-12} = \frac{1}{6}$

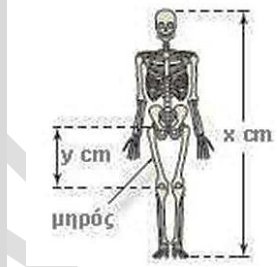
32753. Οι ανθρωπολόγοι για να προσεγγίσουν το ύψος ενός ενήλικα, χρησιμοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις που παριστάνουν τη σχέση μεταξύ του μήκους y (σε cm) οστού του μηρού και του ύψους x (σε cm) του ενήλικα ανάλογα με το φύλο του :

Γυναίκα: $y = 0,43x - 26$ Άνδρας $y = 0,45x - 31$

α) Ένας ανθρωπολόγος ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 38,5cm που ανήκει σε γυναίκα. Να υπολογίσετε το ύψος της γυναίκας.

β) Ο ανθρωπολόγος βρίσκει μεμονωμένα οστά χεριού, τα οποία εκτιμά ότι ανήκουν σε άντρα ύψους περίπου 164cm. Λίγα μέτρα πιο κάτω, ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 42,8cm που ανήκει σε άντρα. Είναι πιθανόν το μηριαίο οστό και τα οστά χεριού να προέρχονται από το ίδιο άτομο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να εξετάσετε αν μπορεί ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους.



Λύση

α) Αντικαθιστούμε για $y = 38,5$ στον τύπο που δίνει το μήκος y (σε cm) οστού του μηρού και του ύψους x (σε cm) μιας γυναίκας $38,5 = 0,43x - 26 \Leftrightarrow 0,43x = 64,5 \Leftrightarrow x = 150\text{cm}$.

Άρα το ύψος της γυναίκας είναι 1,5m

β) Όμοια : $42,8 = 0,45x - 31 \Leftrightarrow 0,45x = 73,8 \Leftrightarrow x = 164\text{cm}$. Επομένως είναι πιθανό να προέρχονται από τον ίδιο άντρα.

γ) Θα πρέπει $0,43x - 26 = 0,45x - 31 \Leftrightarrow 0,02x = 5 \Leftrightarrow x = 250\text{cm}$. Όταν έχουν ύψος 2,5m.

33582. Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο $\Pi = 40\text{cm}$. Αν $x\text{cm}$ είναι το μήκος του ορθογωνίου, τότε να δείξετε ότι:

α) $0 < x < 20$.

β) Το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση: $E(x) = 20x - x^2$.

γ) Για το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου ισχύει: $E(x) \leq 100$, για κάθε $x \in (0, 20)$.

δ) Από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 40cm , εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς 10cm .

Λύση

α) Το μήκος του ορθογωνίου είναι x και έστω y το πλάτος του με $x > 0$ και $y > 0$. Είναι $\Pi = 40 \Leftrightarrow 2x + 2y = 40 \Leftrightarrow x + y = 20 \Leftrightarrow y = 20 - x$ και $y > 0 \Leftrightarrow 20 - x > 0 \Leftrightarrow x < 20$ άρα $0 < x < 20$

β) Είναι $E(x) = xy = x(20 - x) = -x^2 + 20x$, $0 < x < 20$

γ) $E(x) \leq 100 \Leftrightarrow -x^2 + 20x \leq 100 \Leftrightarrow x^2 - 20x + 100 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 10)^2 \geq 0$ ισχύει για κάθε $0 < x < 20$.

δ) $E(x) \leq 100$ άρα η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει είναι 100.

$$\text{Είναι } E(x) = 100 \Leftrightarrow -x^2 + 20x = 100 \Leftrightarrow x^2 - 20x + 100 = 0 \Leftrightarrow (x-10)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 10.$$

Για $x = 10$ είναι $y = 20 - 10 = 10$ άρα είναι $x = y = 10$. Πρόκειται λοιπόν για τετράγωνο πλευράς 10.

33586. Δυο φίλοι αποφασίζουν να συνεταιριστούν και ανοίγουν μια επιχείρηση που γεμίζει τόνερ (toner) για φωτοτυπικά μηχανήματα. Τα πάγια μηνιαία έξοδα της εταιρείας ανέρχονται στο ποσό των 6500 ευρώ (για ενοίκιο, παροχές, μισθούς, φόρους κ.α.). Το κόστος γεμίσματος ενός τόνερ είναι 15 ευρώ, η δε τιμή πώλησης του ενός τόνερ καθορίζεται σε 25 ευρώ.

α) Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει το μηνιαίο κόστος $K(v)$ της επιχείρησης, αν γεμίζει τόνερ το μήνα.

β) Να γράψετε μια σχέση που να εκφράζει τα μηνιαία έσοδα $E(v)$ της επιχείρησης από την πώληση v αριθμού τόνερ το μήνα.

γ) Να βρείτε πόσα τόνερ πρέπει να πωλούνται κάθε μήνα ώστε η επιχείρηση:

i) να μην έχει ζημιά.

ii) να έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ.

Λύση

α) Το κόστος για το γέμισμα v τόνερ είναι $15v$ και μαζί με τα πάγια έξοδα, έχουμε: $K(v) = 15v + 6500$

β) Τα έσοδα από την πώληση v τόνερ, είναι $E(v) = 25v$

γ) i) Για να μην έχει ζημιά πρέπει Έσοδα = Έξοδα

Άρα $E(v) = K(v) \Leftrightarrow 15v + 6500 = 25v \Leftrightarrow 10v = 6500 \Leftrightarrow v = 650$ τόνερ ανά μήνα.

ii) Έστω $A(v)$ η συνάρτηση του κέρδους τότε πρέπει :

$$A(v) \geq 500 \Leftrightarrow E(v) - K(v) \geq 500 \Leftrightarrow 25v - 15v - 6500 \geq 500 \Leftrightarrow 10v \geq 7000 \Leftrightarrow v \geq 700 \text{ τόνερ ανά μήνα}$$

33855.α) Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + 2x + 3 = \alpha$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του α η εξίσωση $x^2 + 2x + 3 = \alpha$ έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

ii. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εξίσωση να έχει μια διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{f(x)} - 2 \leq 2$.

Λύση

α) Η εξίσωση ισοδύναμα είναι $x^2 + 2x + 3 - \alpha = 0$ και έχει διακρίνουσα $\Delta = 4 - 4(3 - \alpha) = 4\alpha - 8$

i. Αν $\Delta > 0 \Leftrightarrow 4\alpha - 8 > 0 \Leftrightarrow 4\alpha > 8 \Leftrightarrow \alpha > 2$ τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες.

ii. Αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow 4\alpha - 8 = 0 \Leftrightarrow 4\alpha = 8 \Leftrightarrow \alpha = 2$ τότε η εξίσωση έχει μία

διπλή ρίζα την $x = -\frac{2}{2} = -1$.

β) i. $f(x) \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Είναι $f(x) \geq 2 \Leftrightarrow f(x) - 2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η εξίσωση ορίζεται στο $\mathbb{R}$. Είναι

$$\sqrt{f(x)-2} \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{f(x)-2}^2 \leq 4 \Leftrightarrow f(x)-2 \leq 4 \Leftrightarrow f(x) \leq 6 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 \leq 6 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \leq 0$$

Είναι $\Delta = 16$ και ρίζες $x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$ και το

πρόσημο του τριωνόμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Άρα η ανίσωση έχει λύσεις τα $x \in [-3, 1]$.

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
$x^2 + 2x - 3$	+	0	-	0	+

34184. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με κάθετες πλευρές $AB = x$ και $A\Gamma = y$, έτσι ώστε $x + y = 10$.

α) Να εκφράσετε το εμβαδόν E του τριγώνου $AB\Gamma$ ως συνάρτηση του x και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$.

β) Αν το εμβαδόν του τριγώνου είναι $E(x) = \frac{1}{2}(-x^2 + 10x)$, να δείξετε ότι $E(x) \leq \frac{25}{2}$, για κάθε $x \in (0, 10)$.

γ) Να βρείτε την τιμή του $x \in (0, 10)$ ώστε το εμβαδόν $E(x)$ να γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$. Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο $AB\Gamma$;

Λύση

α) Είναι $x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x$. Πρέπει $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 10 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 10 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 10$.

Το εμβαδόν του τριγώνου συναρτήσει του x είναι $E(x) = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}x(10 - x) = \frac{1}{2}(-x^2 + 10x)$, $0 < x < 10$

β) $E(x) \leq \frac{25}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(-x^2 + 10x) \leq \frac{25}{2} \Leftrightarrow -x^2 + 10x \leq 25 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 5)^2 \geq 0$ ισχύει για κάθε $0 < x < 10$.

γ) Είναι $E(x) = \frac{25}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(-x^2 + 10x) = \frac{25}{2} \Leftrightarrow -x^2 + 10x = 25 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = 0 \Leftrightarrow (x - 5)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 5$

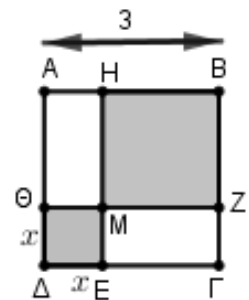
Για $x = 5$ είναι $y = 10 - 5 = 5$ άρα είναι $x = y = 5$. Επομένως το $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

34182. Στο επόμενο σχήμα δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς $AB = 3\text{cm}$ και τυχαίο σημείο M που κινείται στη διαγώνιο $B\Delta$ (δηλαδή το M δεν θα ταυτιστεί με τα άκρα της διαγωνίου).

α) Να εκφράσετε το συνολικό εμβαδόν E των σκιασμένων τετραγώνων $HBZM$ και $\Theta ME\Delta$ ως συνάρτηση του x και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$.

β) Αν το εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων είναι

$$E(x) = 2x^2 - 6x + 9, \text{ να αποδείξετε ότι } E \geq \frac{9}{2}, \text{ για κάθε } x \in (0, 3).$$



γ) Για ποια θέση του Μ πάνω στη ΒΔ το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{9}{2}$;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) $ΕΓ = ΔΓ - ΔΕ = 3 - x$,

$$E(x) = (\Theta Μ Ε Δ) + (Η Β Ζ Μ) = x^2 + (3-x)^2 = x^2 + 9 - 6x + x^2 = 2x^2 - 6x + 9, x \in (0,3)$$

β) $E \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 9 \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 18 \geq 9 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (2x-3)^2 \geq 0$ ισχύει

γ) $E = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 9 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 18 = 9 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow (2x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x-3=0 \Leftrightarrow$
 $2x=3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}.$

Το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται ελάχιστο όταν $x = \frac{3}{2}$ cm, δηλαδή όταν το Ε είναι
το μέσο του ΔΓ. Επειδή $ΜΕ // ΒΓ$ και το Ε είναι μέσο της ΔΓ, το Μ είναι το μέσο της ΒΔ.

34317. Αν ένας κάτοικος μιας πόλης Α καταναλώσει x κυβικά νερού σε ένα χρόνο, το ποσό που θα πρέπει να πληρώσει δίνεται (σε ευρώ) από τη συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 12 + 0,5x, & \text{αν } 0 \leq x \leq 30 \\ 0,7x + 6, & \text{αν } x > 30 \end{cases}$.

α) Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει όποιος:

i) έλειπε από το σπίτι του και δεν είχε καταναλώσει νερό.

ii) έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερού.

iii) έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερού.

β) Σε μια άλλη πόλη Β το ποσό (σε ευρώ) που αντιστοιχεί σε κατανάλωση x κυβικών μέτρων δίνεται από τον τύπο: $g(x) = 12 + 0,6x$, για $x \geq 0$.

Ένας κάτοικος της πόλης Α και ένας κάτοικος της πόλης Β κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά νερού, για το 2013. Αν ο κάτοικος της πόλης Α πλήρωσε μεγαλύτερο ποσό στο λογαριασμό του από τον κάτοικο της πόλης Β, να αποδείξετε ότι ο κάθε ένας από τους δύο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού.

Λύση

α) i) $f(0) = 12$ ευρώ

ii) $f(10) = 12 + 0,5 \cdot 10 = 12 + 5 = 17$ ευρώ

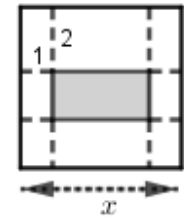
iii) $f(50) = 0,7 \cdot 50 + 6 = 35 + 6 = 41$ ευρώ

β) Θα πρέπει : $f(x) > g(x)$

Αν $0 \leq x \leq 30$: $f(x) > g(x) \Leftrightarrow 12 + 0,5x > 12 + 0,6x \Leftrightarrow x < 0$ άτοπο.

Αν $x > 30$: $f(x) > g(x) \Leftrightarrow 0,7x + 6 > 12 + 0,6x \Leftrightarrow 0,1x > 6 \Leftrightarrow x > \frac{6}{0,1} \Leftrightarrow x > 60$. Άρα ο κάθε ένας από τους δύο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού.

35724. Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm ($5 \leq x \leq 10$) στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).



α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση: $E(x) = (x-2)(x-4)$, $5 \leq x \leq 10$

β) Να βρεθεί η τιμή του x ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι 35 cm^2 .

γ) Να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου, αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον 24 cm^2 .

Λύση

α) Έστω α, β οι διαστάσεις της κάρτας.

Τότε $\alpha = x - 1 - 1 = x - 2$ και $\beta = x - 2 - 2 = x - 4$.

Επειδή το εμβαδόν του ορθογώνιου είναι $E = \alpha \cdot \beta$, το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων

εκφράζεται από τη συνάρτηση: $E(x) = (x-2)(x-4)$

β) $E(x) = (x-2)(x-4) \Leftrightarrow 35 = (x-2)(x-4) \Leftrightarrow$

$x^2 - 2x - 4x + 8 = 35 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 27 = 0 \Leftrightarrow x = 9 \text{ cm}$ ή $x = -3 < 0$ απορρίπτεται

γ) $E(x) \geq 24 \Leftrightarrow (x-2)(x-4) \geq 24 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4x + 8 \geq 24 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 16 \geq 0$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16) = 36 + 64 = 100 = 10^2$, $x_1 = \frac{6+10}{2} = \frac{16}{2} = 8$ και $x_2 = \frac{6-10}{2} = \frac{-4}{2} = -2$

Άρα: $x^2 - 6x - 16 \geq 0 \Leftrightarrow (x-8)(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow \overset{x+2>0}{x-8 \geq 0} \Leftrightarrow x \geq 8$

36654. Δυο φίλοι αποφάσισαν να κάνουν το χόμπι τους δουλειά. Τους άρεσε να ζωγραφίζουν μπλουζάκια και έστησαν μια μικρή επιχείρηση για να τα πουλήσουν μέσω διαδικτύου. Τα έξοδα κατασκευής (σε ευρώ) για x μπλουζάκια δίνονται από τη συνάρτηση $K(x) = 12,5x + 120$ και τα έσοδα από την πώλησή τους (σε ευρώ), σε διάστημα ενός μηνός, από τη συνάρτηση $E(x) = 15,5x$.

α) Αν η επιχείρηση κάποιο μήνα δεν κατασκευάσει μπλουζάκια, έχει έξοδα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Τι εκφράζει ο αριθμός 12,5 και τι ο αριθμός 15,5 στο πλαίσιο του προβλήματος;

γ) Να βρείτε πόσα μπλουζάκια πρέπει να πουλήσουν ώστε να έχουν έσοδα όσα και έξοδα (δηλαδή να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση).

δ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια θα έχουν κέρδος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) Τα πάγια έξοδα της επιχείρησης είναι $K(0) = 120$ ευρώ, γιατί πρόκειται για το κόστος της εταιρείας τους χωρίς καθόλου παραγωγή.

β) Επειδή τα πάγια έξοδα είναι 120 ευρώ και από την παραγωγή x μπλουζάκια, το κόστος είναι $12,5x$, ο αριθμός 12,5 εκφράζει το πόσο κοστίζει ένα μπλουζάκι. Αντίστοιχα επειδή τα έσοδα από τη πώληση x τεμαχίων, η είσπραξη είναι $15,5x$, το 15,5 είναι η είσπραξη από τη πώληση μιας μπλούζας, άρα το 15,5 εκφράζει το πόσο πουλιέται ένα μπλουζάκι.

γ) $K(x) = E(x) \Leftrightarrow 12,5x + 120 = 15,5x \Leftrightarrow 3x = 120 \Leftrightarrow x = 40$ μπλουζάκια. Άρα πρέπει να πουλήσουν 40 μπλουζάκια για να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση.

δ) Αν $A(x)$ η συνάρτηση του κέρδους τότε $A(x) = E(x) - K(x) = 15,5x - 12,5x - 120 = 3x - 120$
 $A(60) = 3 \cdot 60 - 120 = 180 - 120 = 60$ ευρώ. Θα έχει κέρδος 60 ευρώ.

36668. Για τη μέτρηση θερμοκρασιών χρησιμοποιούνται οι κλίμακες βαθμών Κελσίου (Celsius), Φαρενάιτ (Fahrenheit) και Κέλβιν (Kelvin). Οι μετατροπές της θερμοκρασίας από Κελσίου σε Φαρενάιτ και από Κελσίου σε Κέλβιν, περιγράφονται από τις προτάσεις Π1 και Π2:

Π1: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) σε βαθμούς Φαρενάιτ ($^{\circ}\text{F}$), πολλαπλασιάζουμε τους βαθμούς Κελσίου με 1,8 και προσθέτουμε 32.

Π2: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) σε βαθμούς Κέλβιν ($^{\circ}\text{K}$), προσθέτουμε στους βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) το 273.

α) Να εκφράσετε συμβολικά τη σχέση που περιγράφει η κάθε πρόταση.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας σε βαθμούς Κέλβιν ($^{\circ}\text{K}$) και της θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ ($^{\circ}\text{F}$) είναι η: $K = \frac{F-32}{1,8} + 273$.

γ) Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από 278°K μέχρι 283°K . Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε $^{\circ}\text{F}$.

Λύση

α) Π1: $F = 1,8 \cdot C + 32$ (1) και Π2: $K = C + 273$ (2)

β) $F = 1,8 \cdot C + 32 \Leftrightarrow 1,8 \cdot C = F - 32 \Leftrightarrow C = \frac{F-32}{1,8} \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} K + 273 = \frac{F-32}{1,8} \Leftrightarrow K = \frac{F-32}{1,8} - 273$ (3)

γ) $278 < K < 283 \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} 278 < \frac{F-32}{1,8} + 273 < 283 \stackrel{(-273)}{\Leftrightarrow} 5 < \frac{F-32}{1,8} < 10 \stackrel{(\cdot 1,8)}{\Leftrightarrow} 9 < F - 32 < 18 \Leftrightarrow 41 < F < 50$.

36679. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = |x| - 2$.

γ) Για $x \in A$, να λύσετε την εξίσωση: $(f(x) + 2)^2 - 4f(x) - 5 = 0$.

Λύση

α) Πρέπει $|x| - 3 \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq 3 \Leftrightarrow x \neq \pm 3$. Άρα $A_f = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

β) $f(x) = \frac{x^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3} = \frac{|x|^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3} = \frac{|x|^2 - 2|x| - 3|x| + 6}{|x| - 3} =$
 $\frac{|x|(|x| - 2) - 3(|x| - 2)}{|x| - 3} = \frac{(|x| - 2) \cdot \cancel{(|x| - 3)}}{\cancel{|x| - 3}} = |x| - 2$

γ) $(f(x) + 2)^2 - 4f(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 - 4(|x| - 2) - 5 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 - 4|x| + 8 - 5 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 - 4|x| + 3 = 0$ (1)

Θέτουμε $|x| = \omega$ (2)

(1) $\Rightarrow \omega^2 - 4\omega + 3 = 0 \Leftrightarrow \omega = 1$ ή $\omega = 3$, (2) $\stackrel{\omega=1}{\Rightarrow} |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$, (2) $\stackrel{\omega=3}{\Rightarrow} |x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3$ απορρίπτονται

36680. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2 - 4x + \alpha$ και $g(x) = \alpha x - 5$,

με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Αν ισχύει $f(2) = g(2)$, να βρείτε την τιμή του α .

β) Για $\alpha = 1$,

i) να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = g(x)$.

ii) να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq g(x)$ και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση:

$$|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x).$$

Λύση

α) $f(2) = g(2) \Leftrightarrow 2^2 - 4 \cdot 2 + \alpha = 2\alpha - 5 \Leftrightarrow \alpha = 1$

β) i) Για $\alpha = 1$ είναι $f(x) = x^2 - 4x + 1$ και $g(x) = x - 5$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 3$$

ii) $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 \geq x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 \geq 0$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον πίνακα

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$	+	○	○	+

Η λύση της ανίσωσης είναι: $x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$

$$|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x), \text{ όταν:}$$

$$f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 - x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$$

Θέμα 1ο

14801.α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση Σ (Σωστό), αν η πρόταση είναι αληθής ή Λ (Λάθος), αν η πρόταση είναι ψευδής.

i. Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ισχύει η πρόταση:

Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \delta$.

ii. Για κάθε $\theta \in (0, +\infty)$ ισχύει: $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$.

iii. Η εξίσωση $x^3 = 5$ έχει δύο πραγματικές ρίζες.

iv. Αν ισχύουν $\alpha > 0$ και $\Delta < 0$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, τότε το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι αρνητικό για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό x .

v. Ο παρακάτω πίνακας θα μπορούσε να είναι πίνακας τιμών μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, 4]$.

x	0	1	1	2	4
$y = f(x)$	0	1	-1	2	0,5

β) Να αποδείξετε ότι, για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β , ισχύει η ανισότητα:

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|.$$

Λύση

α) i. Λ ii. Σ iii. Λ iv. Λ v. Λ

β) Επειδή και τα δύο μέλη της σχέσης $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε:

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \Leftrightarrow |\alpha + \beta|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2 \Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 \leq |\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \leq \alpha^2 + 2|\alpha||\beta| + \beta^2 \Leftrightarrow 2\alpha\beta \leq 2|\alpha||\beta| \Leftrightarrow |\alpha\beta| \geq \alpha\beta \text{ που ισχύει.}$$

Η ισότητα $|\alpha\beta| = \alpha\beta$ ισχύει μόνο αν $\alpha\beta \geq 0$, δηλαδή αν και μόνο αν οι αριθμοί α, β είναι ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσος με μηδέν.

Γραφική παράσταση συνάρτησης

Θέμα 2ο

12680. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
 β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(4,3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .
 γ) Να εξετάσετε αν το σημείο $N(-1,-2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

Λύση

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει $x \geq 0$ και $\sqrt{x}-1 \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1$, οπότε $A = [0,1) \cup (1,+\infty)$.

β) Το σημείο M ανήκει στην γραφική παράσταση της f , αν και μόνο αν $f(4) = 3 \Leftrightarrow \frac{4-1}{\sqrt{4}-1} = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{1} = 3$ που ισχύει

γ) Επειδή το -1 που είναι η τετμημένη του σημείου N δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f , το σημείο N δεν ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

12686. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x-1}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
 β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(2,4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
 γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

Λύση

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$, οπότε $A_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

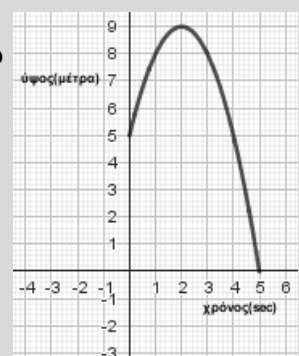
β) Το σημείο M ανήκει στη γραφική παράσταση της f αν και μόνο αν $f(2) = 4 \Leftrightarrow \frac{2 \cdot 2}{2-1} = 4 \Leftrightarrow \frac{4}{1} = 4$ ισχύει

γ) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x-1} = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες στην αρχή O .

12729. Ένα σώμα εκτελεί κατακόρυφη βολή, ώστε η απόστασή του από το έδαφος (μέτρα) σε σχέση με το χρόνο (sec) να φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα. Από τις πληροφορίες του διαγράμματος να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

- α. Από ποιο ύψος εκτελείται η κατακόρυφη βολή;
 β. Ποιο το μέγιστο ύψος που φτάνει το σώμα και ποια χρονική στιγμή συμβαίνει αυτό;
 γ. Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που το σώμα βρίσκεται σε ύψος 8 μέτρα από το έδαφος.
 δ. Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που το σώμα συναντά το έδαφος.



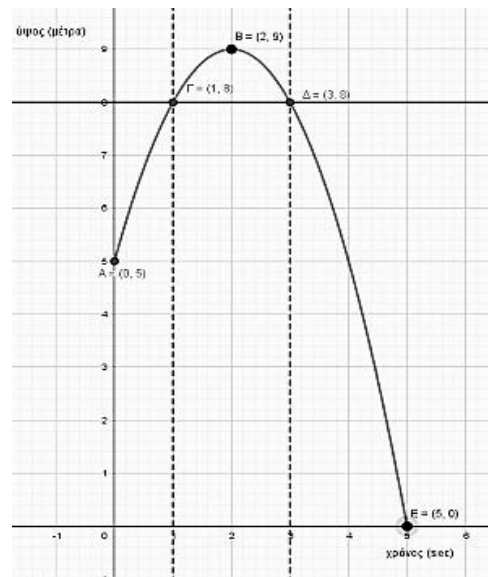
Λύση

α) Ως αρχή της μέτρησης έχουμε το σημείο $A(0,5)$. Οπότε για τη χρονική στιγμή $t_1=0$ sec το σώμα βρίσκεται σε ύψος 5 μέτρα.

β) Το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το σώμα αντιστοιχεί στο σημείο $B(2,9)$. Οπότε για τη χρονική στιγμή $t_2=2$ sec το σώμα βρίσκεται στο μέγιστο ύψος 9 μέτρα.

γ) Αν φέρουμε την ευθεία $y=8$ που αντιστοιχεί σε ύψος 8 μέτρων θα δούμε ότι τέμνει το διάγραμμα σε δύο σημεία. Αυτά είναι το $\Gamma(1,8)$ και $\Delta(3,8)$. Οπότε το σώμα βρίσκεται σε ύψος 8 μέτρα τις χρονικές στιγμές $t_3=1$ sec και $t_4=3$ sec.

δ) Το έδαφος αντιστοιχεί στον άξονα $x'x$ (ύψος=0 μέτρα). Παρατηρούμε ότι το διάγραμμα έχει μόνο ένα κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$, το E που αντιστοιχεί και στο τέλος της μέτρησης. Οπότε το σώμα συναντά στο έδαφος τη χρονική στιγμή $t_5=5$ sec.



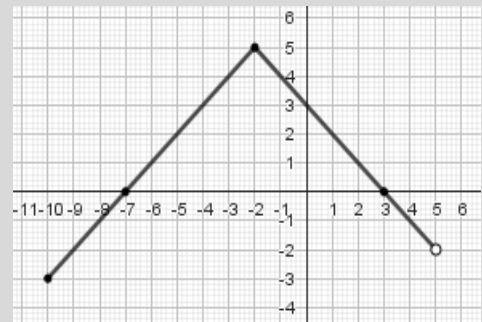
12910. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A και το σύνολο τιμών της $f(A)$.

β) Να βρείτε τις τιμές $f(-2)$, $f(0)$, $f(3)$.

γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) = 0$.

δ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) < 0$.



Λύση

α) $A = [-10, 5]$ και $f(A) = [-3, 5]$.

β) $f(-2) = 5$, $f(0) = 3$, $f(3) = 0$

γ) Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$, οπότε: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -7$ ή $x = 3$

δ) Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) < 0$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$, οπότε: $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in [-10, -7) \cup (3, 5]$.

13322. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{x}{x^2 + 2} + \sqrt{x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .

β) Να βρείτε (εφόσον ορίζονται) τις τιμές της συνάρτησης g για $x=1$, $x = -2$ και $x = 2$.

γ) Τέμνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης g τον $y'y$ άξονα;

Λύση

α) Η συνάρτηση ορίζεται όταν $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ και

$x^2 + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq -2$ που ισχύει. Άρα $A_f = [1, +\infty)$.

β) Είναι $g(1) = \frac{1}{1^2 + 2} + \sqrt{1-1} = \frac{1}{3}$, $g(2) = \frac{2}{2^2 + 2} + \sqrt{2-1} = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$.

Επειδή το -2 δεν βρίσκεται στο πεδίο ορισμού της g , δεν ορίζεται η τιμή της για $x = -2$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g δεν τέμνει τον $y'y$ άξονα, διότι το 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

14072. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

β) Ανήκει το σημείο $M(1, 3)$ στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ;

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$, οπότε $A_f = \mathbb{R} - \{2\}$

β) Πρέπει και αρκεί $f(1) = 3 \Leftrightarrow \frac{1^2 - 4}{1 - 2} = 3 \Leftrightarrow \frac{-3}{-1} = 3$ ισχύει.

Άρα το σημείο $M(1, 3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

γ) Είναι $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2, x \neq 2$.

Είναι $f(0) = 2$, οπότε η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, 2)$.

Είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$. Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(-2, 0)$.

14306. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{5} + 3$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να υπολογίσετε το $f(-24)$.

γ) Να εξετάσετε αν το σημείο $(1, 3)$ ανήκει στην γραφική παράσταση;

Λύση

α) Για το πεδίο ορισμού της f πρέπει $1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$, άρα $A = (-\infty, 1]$.

β) $f(-24) = \frac{\sqrt{1+24}}{5} + 3 = \frac{5}{5} + 3 = 1 + 3 = 4$.

γ) Για να ανήκει το σημείο $(1, 3)$ στη γραφική παράσταση της f πρέπει

$f(1) = 3 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1-1}}{5} + 3 = 3 \Leftrightarrow 0 + 3 = 3$ ισχύει

14596. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}$ με $x \neq -1$.

- α)** Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης και να δείξετε ότι $f(x) = x - 3$ για κάθε $x \neq -1$.
β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$.

Λύση

$$\alpha) f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} = \frac{x^2 - 2x - 2 - 1}{x + 1} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1) - 2(x+1)}{x+1} = \frac{\cancel{(x+1)}(x-1-2)}{\cancel{x+1}} = x - 3$$

- β)** Είναι $f(1) = 1 - 3 = -2 \neq -4$, άρα η γραφική παράσταση της f δεν διέρχεται από το σημείο A .

14603. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x \leq 3 \\ x^2, & 3 < x < 10 \end{cases}$.

- α)** Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$.
β) Διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
γ) Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $y'y$.

Λύση

$$\alpha) f(-1) = 2(-1) - 5 = -7, f(3) = 2 \cdot 3 - 5 = 1 \text{ και } f(5) = 5^2 = 25$$

- β)** Για να διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων, πρέπει $f(0) = 0$.

Όμως $f(0) = 2 \cdot 0 - 5 = -5$, οπότε η γραφική παράσταση της f δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

- γ)** Είναι $f(0) = -5$, οπότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, -5)$.

14628. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x}$, $x \neq 0$.

- α)** Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $A(4, 3)$.
β) Να εξετάσετε αν το σημείο $B(-4, -3)$ είναι σημείο της C_f .
γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y = 3$.

Λύση

- α)** Για να διέρχεται η C_f από το σημείο $A(4, 3)$ πρέπει

$$f(4) = 3 \Leftrightarrow \frac{4^2 - 4}{4} = 3 \Leftrightarrow \frac{16 - 4}{4} = 3 \Leftrightarrow \frac{12}{4} = 3 \text{ ισχύει.}$$

- β)** Για να διέρχεται η C_f από το σημείο $B(-4, -3)$ πρέπει

$$f(-4) = -3 \Leftrightarrow \frac{(-4)^2 - 4}{-4} = -3 \Leftrightarrow \frac{16 - 4}{-4} = -3 \Leftrightarrow -\frac{12}{4} = -3 \text{ ισχύει.}$$

γ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 3$.

$$\text{Για } x \neq 0 \text{ είναι } f(x) = 3 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

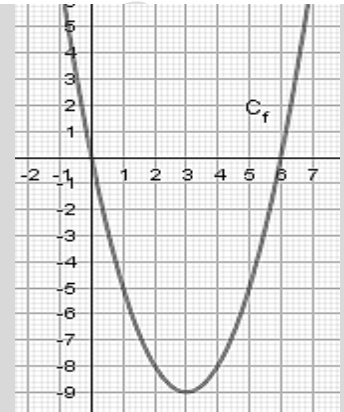
Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25$ και ρίζες

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{25}}{2} = \frac{8}{2} = 4, \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{25}}{2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $y = 3$ είναι τα $(4, 3)$ και $(-1, 3)$.

15000. Δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Με τη βοήθεια του σχήματος:

- α) Να βρείτε τις τιμές της f για $x = 0, 1, 3, 5$.
 β) Να λύσετε γραφικά την εξίσωση $f(x) = 0$.
 γ) Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x) < 0$.



Λύση

α) Είναι $f(0) = 0, f(1) = -5, f(3) = -3$ και $f(5) = -5$.

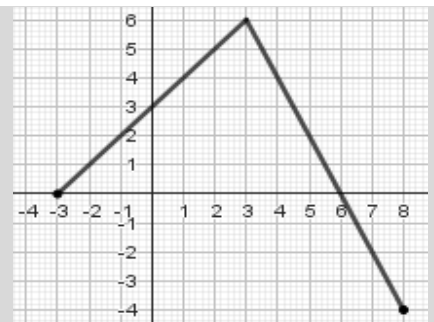
β) Λύσεις της εξίσωσης είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον x' άξονα άρα $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 6$.

γ) Λύσεις της ανίσωσης είναι όλες οι τιμές των τετμημένων των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x' άρα $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 6)$.

35034. Στο παραπάνω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

- α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
 β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-3	-1	0	3		
y					-2	-4



γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες.

δ) Να προσδιορίσετε το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές.

Λύση

α) Οι προβολές όλων των σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στον άξονα x' , δημιουργούν το σύνολο $[-3, 8]$, άρα $A_f = [-3, 8]$.

β)

x	-3	-1	0	3	7	8
y	0	2	3	6	-2	-4

γ) Είναι τα σημεία $(-3,0), (6,0)$ με τον $x'x$ και το $(0,3)$ με τον $y'y$.

δ) Είναι στο διάστημα $(-3,6)$.

34159. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f .

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Λύση

α) Πρέπει $x \neq 3$. Άρα $A_f = \mathbb{R} - \{3\}$

$$\beta) f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \frac{(x-2)(\cancel{x-3})}{\cancel{x-3}} = x - 2$$

γ) Για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ λύνουμε την εξίσωση: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ είναι το σημείο $A(2,0)$. Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $y'y$ είναι το σημείο $(0, f(0))$. Είναι $f(0) = 0 - 2 = -2$, άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $y'y$ είναι το $B(0, -2)$.

35413. Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού α , ώστε το σημείο $M\left(\alpha, \frac{1}{8}\right)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Λύση

α) Πρέπει $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$. Άρα $A_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

β) Το σημείο $M\left(\alpha, \frac{1}{8}\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

$$\text{Άρα ισχύει } f(\alpha) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha^2 - 1} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \alpha^2 - 1 = 8 \Leftrightarrow \alpha^2 = 9 \Leftrightarrow \alpha = \pm 3$$

36885. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) i. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 0$.

ii. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f(3)$.

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ άρα έχει πεδίο ορισμού το σύνολο

$$D_f = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty) = \mathbb{R} - \{2\}.$$

β) i. Για κάθε $x \neq 2$ είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x - 2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ οι οποίες είναι δεκτές λύσεις.

ii. $f(0) = \frac{0^2 - 1}{0 - 2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$ και $f(3) = \frac{3^2 - 1}{3 - 2} = \frac{9 - 1}{1} = 8$

γ) Από το β) i. ερώτημα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(-1, 0)$ και $B(1, 0)$. Επίσης αφού

$$f(0) = \frac{1}{2} \text{ τότε η } C_f \text{ τέμνει τον άξονα } y'y \text{ στο σημείο } \Gamma\left(0, \frac{1}{2}\right).$$

36889. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x - 15$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $f(-5) + f(0) + f(3)$.

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης της f με τους άξονες.

Λύση

α) $f(-5) = (-5)^2 + 2 \cdot (-5) - 15 = 25 - 10 - 15 = 0$, $f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 - 15 = -15$, $f(3) = 3^2 + 2 \cdot 3 - 15 = 0$
 $f(-5) + f(0) + f(3) = 0 - 15 + 0 = -15$

β) Για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ λύνουμε την εξίσωση: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ή $x = -5$

Άρα τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ είναι τα σημεία $A(-5, 0)$ και

$B(3, 0)$. Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $y'y$ είναι το σημείο $(0, f(0))$.

Είναι $f(0) = -15$, άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $y'y$ είναι το σημείο $\Gamma(0, -15)$.

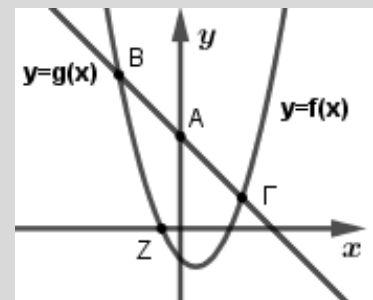
Θέμα 4ο

12628. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2 - x - 1$ και $g(x) = 3 - x$ των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δίνονται στο διπλανό σχήμα.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B, Γ, Z.

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της $y = f(x)$ που βρίσκονται πάνω από την γραφική παράσταση της $y = g(x)$.

γ) Αποδείξτε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό α , η απόσταση των αριθμών $f(\alpha)$ και $-g(\alpha)$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι τουλάχιστον 1.



Λύση

α) Το σημείο A ανήκει στη γραφική παράσταση της g και έχει $x = 0$, οπότε $g(0) = 3 - 0 = 3$, άρα $A(0, 3)$. Τα σημεία B και Γ είναι κοινά σημεία των C_f, C_g , οπότε οι τετμημένες τους είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 3 - x \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Για $x = 2$ είναι $g(2) = 3 - 2 = 1$, άρα $\Gamma(2, 1)$ και για $x = -2$ είναι $g(-2) = 3 - (-2) = 5$ άρα $B(-2, 5)$.

Το σημείο Z βρίσκεται στη C_f και έχει $y = 0$, άρα $x^2 - x - 1 = 0$.

Η τελευταία είναι 2^{ου} βαθμού με $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$ και ρίζες $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

Επειδή $x_Z < 0$, είναι $x_Z = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$, οπότε $Z\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, 0\right)$.

β) Οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της $y = f(x)$ που βρίσκονται πάνω από την γραφική παράσταση της $y = g(x)$ είναι οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^2 - x - 1 > 3 - x \Leftrightarrow x^2 > 4 \Leftrightarrow |x| > 2 \Leftrightarrow x < -2 \text{ ή } x > 2$

γ) Είναι $|f(\alpha) - (-g(\alpha))| = |f(\alpha) + g(\alpha)| = |\alpha^2 - \alpha - 1 + 3 - \alpha| = |\alpha^2 - 2\alpha + 2| = |\alpha^2 - 2\alpha + 1 + 1| = |(\alpha - 1)^2 + 1| = (\alpha - 1)^2 + 1 \geq 1$ γιατί $(\alpha - 1)^2 \geq 0$.

12788. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 1)^2$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(\sqrt{3}) + f(-\sqrt{3}) = 8$.

β) Να βρείτε όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της f , με συντεταγμένες ακέραιους αριθμούς, τα οποία βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 4$.

γ) Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha \neq \beta$ ώστε να ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$.

Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 2$.

Λύση

α) $f(\sqrt{3}) + f(-\sqrt{3}) = (\sqrt{3} - 1)^2 + (-\sqrt{3} - 1)^2 = (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} + 1 + (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} + 1 = 3 + 1 + 3 + 1 = 8$

$$\beta) f(x) < 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 < 4 \Leftrightarrow |x-1| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-1 < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 3.$$

Επειδή ο x είναι ακέραιος, οι δυνατές τιμές του είναι 0, 1, 2.

Είναι $f(0) = (0-1)^2 = 1$, $f(1) = (1-1)^2 = 0$, $f(2) = (2-1)^2 = 1$, άρα τα ζητούμενα σημεία είναι τα (0,1), (1,0), (2,1).

$$\gamma) f(\alpha) = f(\beta) \Leftrightarrow (\alpha-1)^2 = (\beta-1)^2 \Leftrightarrow |\alpha-1| = |\beta-1| \Leftrightarrow$$

$$(\alpha-1 = \beta-1 \Leftrightarrow \alpha = \beta \text{ αδύνατο}) \text{ ή } (\alpha-1 = -\beta+1 \Leftrightarrow \alpha+\beta = 2)$$

12941. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{9-x^2}{3-|x|}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η συνάρτηση f .

β) Για τις τιμές του x που ορίζεται η συνάρτηση f να δείξετε ότι $f(x) = 3+|x|$.

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f με τους άξονες.

δ) Αν $g(x) = 3-x^2$ να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Λύση

α) Για να ορίζεται η f πρέπει $3-|x| \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq 3 \Leftrightarrow x \neq \pm 3$, άρα $A_f = \mathbb{R} - \{\pm 3\}$.

$$\beta) \text{ Είναι } f(x) = \frac{9-x^2}{3-|x|} = \frac{9-|x|^2}{3-|x|} = f(x) = \frac{(3-|x|)(3+|x|)}{3-|x|} = 3+|x|$$

γ) Για $y = 0$ είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3+|x| = 0 \Leftrightarrow |x| = -3$ αδύνατη. Άρα η C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

Είναι $f(0) = 3+|0| = 3$, άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο (0,3).

δ) Αρκεί για κάθε $x \neq \pm 3$, η εξίσωση $f(x) = g(x)$ να έχει ακριβώς μια λύση.

$$\text{Είναι } f(x) = g(x) \Leftrightarrow 3+|x| = 3-x^2 \Leftrightarrow |x| = -x^2 \Leftrightarrow |x|^2 + |x| = 0 \Leftrightarrow |x|(|x|+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0) \text{ ή } (|x|+1 = 0 \Leftrightarrow |x| = -1 \text{ αδύνατη})$$

Άρα το κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g είναι το (0, 3).

12944. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x + \frac{1}{x}$ και $g(x) = x - \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = f(2) + g(2) - f\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{1}{2}\right)$.

β) Να αποδείξετε ότι $(f(x))^2 - (g(x))^2 = 4$ για οποιοδήποτε αριθμό $x \neq 0$.

γ) Θεωρούμε την ευθεία $y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , να αποδείξετε ότι $|\alpha| \geq 2$.

Λύση

α) $A = f(2) + g(2) - f\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$

$$A = 2 + \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = 4 - \frac{1}{2} - 2 - \frac{1}{2} + 2 = 4 - 1 = 3$$

β) Για $x \neq 0$ είναι $(f(x))^2 - (g(x))^2 = (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) =$

$$\left(x + \frac{1}{x} - x + \frac{1}{x} \right) \left(x + \frac{1}{x} + x - \frac{1}{x} \right) = \frac{2}{x} \cdot 2x = 4$$

γ) Αρκεί η εξίσωση $f(x) = a$ να έχει λύση.

$$\text{Είναι } f(x) = a \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = a \Leftrightarrow x^2 + 1 = ax \Leftrightarrow x^2 - ax + 1 = 0 \quad (1).$$

Η (1) είναι 2ου βαθμού και έχει λύση όταν $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 \geq 4 \Leftrightarrow |a| \geq 2$

12999. Ένα όχημα, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχει ταχύτητα, η οποία δίνεται από τη σχέση $u = u_0 + a \cdot t$, όπου u η ταχύτητα του οχήματος τη χρονική στιγμή t και a η σταθερή επιτάχυνσή του στη διάρκεια της κίνησης, ενώ u_0 η αρχική ταχύτητα της κίνησής του.

α) Αν η παραπάνω σχέση αποτελεί συνάρτηση της ταχύτητας του οχήματος ως προς το χρόνο, να προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη, ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή και ποιο το ευρύτερο δυνατό πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής.

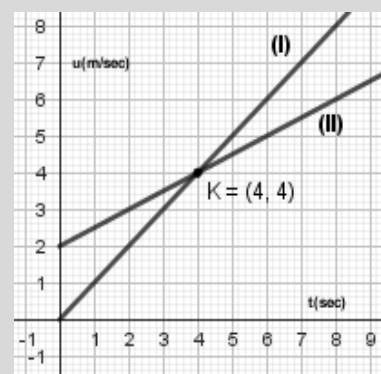
β) Ένα όχημα Α, που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, ξεκινά από θέση ηρεμίας και τη χρονική στιγμή 4 sec έχει ταχύτητα 4 m/sec, ενώ ένα άλλο όχημα Β, που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχει αρχική ταχύτητα 2m/sec.

Οι παρακάτω ευθείες (I), (II) στο διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου περιγράφουν τις ταχύτητες των δύο οχημάτων.

i) Ποια από τις δύο ευθείες (I), (II) περιγράφει την ταχύτητα του οχήματος Α και ποια την ταχύτητα του οχήματος Β;

ii) Να προσδιορίσετε ποιο από τα οχήματα Α, Β κινείται ταχύτερα για κάθε χρονική στιγμή t sec, $t \in (3, 5)$.

iii) Αν ένα όχημα Γ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα 2 m/sec και επιτάχυνση μεγαλύτερη από την επιτάχυνση του οχήματος Α, να σχεδιάσετε στο παραπάνω διάγραμμα μία ευθεία, η οποία θα μπορούσε να περιγράψει την κίνησή του.



Λύση

α) Η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος t και η εξαρτημένη μεταβλητή είναι η ταχύτητα u .

Επειδή ο χρόνος είναι μη αρνητικός, το ευρύτερο δυνατό πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $t \in [0, +\infty)$.

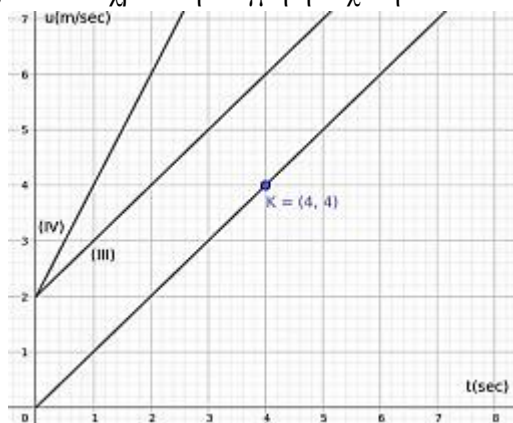
β) i) Εφόσον το όχημα Α ξεκινά από θέση ηρεμίας, η αρχική του αντιστοιχεί στη συνάρτηση της ταχύτητάς του ως προς το χρόνο η ευθεία (I). Αντίστοιχα, εφόσον το όχημα Β ξεκινά με αρχική ταχύτητα 2m/sec αντιστοιχεί στη συνάρτηση της ταχύτητάς του ως προς το χρόνο η ευθεία (II).

ii) Τις χρονικές στιγμές από 3 έως 4 sec το όχημα της γραμμής (II) κινείται ταχύτερα. Τη χρονική στιγμή $t=4\text{sec}$ τα δύο οχήματα έχουν την ίδια ταχύτητα, ενώ τις χρονικές στιγμές από 4 έως 5 sec το όχημα της γραμμής (I) κινείται ταχύτερα.

iii) Επειδή το όχημα Γ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα 2m/sec και επιτάχυνση μεγαλύτερη από την επιτάχυνση του οχήματος Α, σε κάθε χρονική στιγμή η ταχύτητά του θα είναι μεγαλύτερη από αυτήν του οχήματος Α, οπότε η ευθεία (III) δεν τέμνει την ευθεία (I) που περιγράφει την κίνηση του οχήματος Α. Εφόσον, αυτή ξεκινά από το σημείο $\Lambda(0,2)$, θα πρέπει η κλίση της να είναι μεγαλύτερη από την κλίση της ευθείας (I).

Στο διπλανό σχήμα φαίνονται δύο ευθείες:

η (III) περιγράφει όχημα που εκτελεί Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα 2 m/sec και επιτάχυνση ίση με του οχήματος Α, ενώ η ευθεία (IV) περιγράφει την κίνηση ενός οχήματος με επιτάχυνση μεγαλύτερη από αυτήν του οχήματος Α.



13030. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$ και $g(x) = |x + 3|$. Να βρείτε:

α) τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

β) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g .

γ) τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g .

Λύση

α) Για να ορίζεται η f πρέπει $x^2 - 4x - 5 \geq 0$.

Το τριώνυμο $x^2 - 4x - 5$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 36$ και ρίζες

$$x_1 = \frac{4 + \sqrt{36}}{2} = 5, \quad x_2 = \frac{4 - \sqrt{36}}{2} = -1.$$

Είναι $x^2 - 4x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$ ή $x \geq 5$, οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι το $A_f = (-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$.

Η συνάρτηση g δεν έχει περιορισμούς οπότε $A_g = \mathbb{R}$.

β) Οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g είναι οι λύσεις της

$$\text{εξίσωσης } f(x) = g(x). \text{ Είναι } f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x - 5} = |x + 3| \Leftrightarrow (\sqrt{x^2 - 4x - 5})^2 = (x + 3)^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 4x - 5 = x^2 + 6x + 9 \Leftrightarrow -4x - 6x = 9 + 5 \Leftrightarrow -10x = 14 \Leftrightarrow x = -\frac{14}{10} = -\frac{7}{5}$$

$$\text{Είναι } g\left(-\frac{7}{5}\right) = \left|-\frac{7}{5} + 3\right| = \left|-\frac{7}{5} + \frac{15}{5}\right| = \frac{8}{5}, \text{ οπότε κοινό σημείο είναι το } \left(-\frac{7}{5}, \frac{8}{5}\right).$$

γ) Οι τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g είναι οι λύσεις της ανίσωσης

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x - 5} < |x + 3| \Leftrightarrow (\sqrt{x^2 - 4x - 5})^2 < (x + 3)^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 4x - 5 < x^2 + 6x + 9 \Leftrightarrow -4x - 6x < 9 + 5 \Leftrightarrow -10x < 14 \Leftrightarrow x > -\frac{14}{10} = -\frac{7}{5}.$$

Όμως, λόγω του πεδίου ορισμού της f , είναι $x \leq -1$ ή $x \geq 5$, οπότε με συναλήθευση προκύπτει

$$x \in \left(-\frac{7}{5}, -1\right] \cup [5, +\infty).$$

13090. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{16}{x}$, $x > 0$. Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται στη γραφική

παράσταση της συνάρτησης f και έστω A και B οι προβολές του M στους άξονες $y'y$ και $x'x$ αντίστοιχα όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να δείξετε ότι όλα τα ορθογώνια $OAMB$ που προκύπτουν για τις διάφορες θέσεις του σημείου M έχουν εμβαδόν 16 τετραγωνικές μονάδες, ενώ η περίμετρός τους δίνεται, σε μονάδες μήκους, από τη

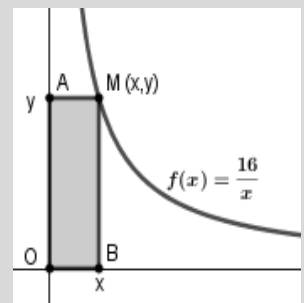
συνάρτηση $\Pi(x) = 2x + \frac{32}{x}$, $x > 0$ όπου x η τετμημένη του M .

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M ώστε το ορθογώνιο $OAMB$ να έχει περίμετρο 20 μονάδες μήκους.

γ) Αν M' είναι το σημείο της γραφικής παράστασης της f ώστε το ορθογώνιο $OAM'B$ να είναι τετράγωνο τότε:

i. Να δείξετε ότι το M' έχει τετμημένη 4.

ii. Να δείξετε ότι το τετράγωνο $OAM'B$ έχει τη μικρότερη περίμετρο από όλα τα ορθογώνια $OAMB$, δηλαδή ότι $\Pi(x) \geq \Pi(4)$ για κάθε $x > 0$.



Λύση

α) Επειδή το σημείο M βρίσκεται στη γραφική παράσταση της f , ισχύει ότι $y = \frac{16}{x}$. Επειδή τα σημεία A και B έχουν συντεταγμένες $A(0, y)$ και $B(x, 0)$, το εμβαδόν του $OAMB$ είναι

$$(OAMB) = (OB)(OA) = x \cdot y = x \cdot \frac{16}{x} = 16 \text{ τετραγωνικές μονάδες και η περίμετρός του είναι}$$

$$\Pi(x) = 2(OB) + 2(OA) = 2x + \frac{32}{x}, x > 0.$$

$$\beta) \Pi(x) = 20 \Leftrightarrow 2x + \frac{32}{x} = 20 \Leftrightarrow 2x^2 + 32 = 20x \Leftrightarrow x^2 + 16 = 10x \Leftrightarrow x^2 - 10x + 16 = 0$$

Η εξίσωση είναι 2^{ου} βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 36$ και ρίζες

$$x_1 = \frac{10 + \sqrt{36}}{2} = 8, x_2 = \frac{10 - \sqrt{36}}{2} = 2.$$

Για $x = 8$ είναι $y = \frac{16}{8} = 2$, άρα $M(8, 2)$ και για $x = 2$ είναι $y = \frac{16}{2} = 8$, δηλαδή $M(2, 8)$.

γ) i. Το ορθογώνιο γίνεται τετράγωνο όταν $(OA) = (OB) \Leftrightarrow x = \frac{16}{x} \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = 4$.

13120. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - (\lambda - 1)x - 4\lambda^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Για $\lambda \neq 0$ να βρείτε το πρόσημο των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το συμμετρικό του σημείου $A(4,4)$ ως προς τον άξονα $x'x$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

δ) Για $\lambda = -1$ να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Λύση

α) Για να υπάρχουν δύο σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$ θα πρέπει η εξίσωση $f(x) = 0$ να έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες. Η f είναι τριώνυμο με διακρίνουσα:

$$\Delta = (\lambda - 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4\lambda^2) = (\lambda - 1)^2 + 16\lambda^2.$$

Επειδή για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι $\Delta > 0$ η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες.

β) Το γινόμενο των ριζών του τριωνύμου είναι $P = -4\lambda^2 < 0$, άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες ετερόσημες για κάθε $\lambda \neq 0$.

γ) Το συμμετρικό του σημείου A ως προς τον άξονα $x'x$ είναι το $A'(4, -4)$ και ανήκει στη γραφική παράσταση της f όταν $f(4) = -4 \Leftrightarrow 16 - 4(\lambda - 1) - 4\lambda^2 = -4 \Leftrightarrow 4 - \lambda + 1 - \lambda^2 = -1 \Leftrightarrow 0 = \lambda^2 + \lambda - 6$.

Η τελευταία είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού με $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$ και ρίζες

$$\lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2} = 2, \lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2} = -3.$$

δ) Για $\lambda = -1$ είναι $f(x) = x^2 + 2x - 4$. Πρέπει $f(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 4 < 0$.

Το τριώνυμο $x^2 + 2x - 4$ έχει $\Delta = 20$ και ρίζες

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{20}}{2} = \frac{-2 + \sqrt{4 \cdot 5}}{2} = \frac{-2 + 2\sqrt{5}}{2} = \frac{2(-1 + \sqrt{5})}{2} = -1 + \sqrt{5},$$

$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{20}}{2} = \frac{-2 - \sqrt{4 \cdot 5}}{2} = \frac{-2 - 2\sqrt{5}}{2} = \frac{2(-1 - \sqrt{5})}{2} = -1 - \sqrt{5}$$

Με βάση τον διπλανό πίνακα προσήμων είναι:

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 4 < 0 \Leftrightarrow x \in (-1 - \sqrt{5}, -1 + \sqrt{5})$$

x	$-\infty$	$-1-\sqrt{5}$	$-1+\sqrt{5}$	$+\infty$	
f(x)	+	○	-	○	+

13168. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 2\lambda x + \gamma$ με $x \in \mathbb{R}$ και παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $(0, -1)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

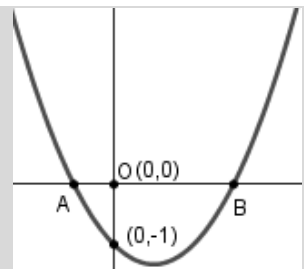
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\gamma = -1$

ii. Η γραφική παράσταση της f δεν είναι κάτω από την ευθεία $y = -\lambda^2 - 1$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία A και B με συντεταγμένες $A(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 1}, 0)$ και $B(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}, 0)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η απόσταση των A και B είναι μεγαλύτερη ή ίση του 2 για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.



Λύση

α) i. Επειδή η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $(0, -1)$, ισχύει ότι $f(0) = -1 \Leftrightarrow \gamma = -1$.

ii. Για να μην είναι η γραφική παράσταση της f κάτω από την ευθεία $y = -\lambda^2 - 1$, πρέπει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ να είναι $f(x) \geq -\lambda^2 - 1$.

$$\text{Είναι } f(x) \geq -\lambda^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2\lambda x - 1 \geq -\lambda^2 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2\lambda x + \lambda^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x + \lambda)^2 \geq 0 \text{ ισχύει}$$

β) Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2\lambda x - 1 = 0$

Η εξίσωση είναι 2^{ου} βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 4\lambda^2 + 4 = 4(\lambda^2 + 1) > 0$ και ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-2\lambda \pm \sqrt{4(\lambda^2 + 1)}}{2} = \frac{-2\lambda \pm 2\sqrt{\lambda^2 + 1}}{2} = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 1}}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 1} \\ x_2 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1} \end{cases}$$

Οπότε τα σημεία είναι τα $A(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 1}, 0)$ και $B(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}, 0)$.

γ) Επειδή τα σημεία A και B βρίσκονται στον άξονα $x'x$, είναι:

$$d(A, B) = (AB) = |x_2 - x_1| = |-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1} - (-\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 1})| \Leftrightarrow$$

$$d = |2\sqrt{\lambda^2 + 1}| = 2\sqrt{\lambda^2 + 1} \quad (\sqrt{\lambda^2 + 1} > 0). \text{ Πρέπει}$$

$$d(A, B) \geq 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{\lambda^2 + 1} \geq 2 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2 + 1} \geq 1 \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow \lambda^2 \geq 0 \text{ ισχύει}$$

13313. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^7 - x}{x^3 - x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

γ) Να δείξετε ότι $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ για κάθε $x \in A$.

δ) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x) = 3$ έχει λύση στο A .

Λύση

α) Για να ορίζεται η f πρέπει $x^3 - x \neq 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ και } x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$, άρα

$$A = \mathbb{R} - \{0, \pm 1\}.$$

β) Επειδή το 0 δεν περιέχεται στο πεδίο ορισμού της f , η γραφική της παράσταση δεν τέμνει τον άξονα

$$y'y. \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^7 - x}{x^3 - x} = 0 \Leftrightarrow x^7 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^6 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ απορρίπτεται ή } x^6 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

απορρίπτονται. Άρα η C_f δεν τέμνει ούτε τον άξονα $x'x$.

$$\gamma) f(x) = \frac{x^7 - x}{x^3 - x} = \frac{\cancel{x}(x^6 - 1)}{\cancel{x}(x^2 - 1)} = \frac{(x^2)^3 - 1^3}{x^2 - 1} \Leftrightarrow f(x) = \frac{(x^2 - 1) \left[(x^2)^2 + x^2 \cdot 1 + 1^2 \right]}{\cancel{x^2 - 1}} = x^4 + x^2 + 1$$

$$\delta) f(x) = 3 \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 1 = 3 \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0 \quad (1)$$

Θέτουμε $x^2 = \omega \geq 0$ και η (1) γίνεται $\omega^2 + \omega - 2 = 0$

Η τελευταία είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 9$ και ρίζες $\omega = 1$ δεκτή ή $\omega = -2$ απορρίπτεται. Τότε $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ απορρίπτονται, οπότε η εξίσωση $f(x) = 3$ δεν έχει λύση στο A .

13479. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |3x - 12| - |2x - 8| - 3|x^2 - 16|$.

Αν $|x| \leq 4$, τότε:

α) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης f χωρίς τις απόλυτες τιμές.

β) Αν $f(x) = 3x^2 - x - 44$.

i. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

ii. Αν το σημείο $M(\mu + 1, -20)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f , να βρείτε την ακέραια τιμή του μ .

Λύση

$$\text{α)} |x| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow -12 \leq 3x \leq 12 \Leftrightarrow -24 \leq 3x - 12 \leq 0 \quad (1)$$

$$|x| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow -8 \leq 2x \leq 8 \Leftrightarrow -16 \leq 2x - 8 \leq 0 \quad (2)$$

$$|x| \leq 4 \Leftrightarrow x^2 \leq 16 \Leftrightarrow x^2 - 16 \leq 0 \quad (3). \text{ Από τις (1), (2), (3) προκύπτει ότι}$$

$$f(x) = -3x + 12 + 2x - 8 - 3(-x^2 + 16) = -x + 4 + 3x^2 - 48 = 3x^2 - x - 44$$

$$\text{β) i. } f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - x - 44 = 0$$

Η εξίσωση είναι 2^{ου} βαθμού με $\Delta = 529$ και ρίζες $x_1 = 4$, $x_2 = -\frac{11}{3}$, οπότε η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα

σημεία $(4, 0)$ και $(-\frac{11}{3}, 0)$. Είναι $f(0) = -44$ οπότε η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, -44)$.

ii. Επειδή το M ανήκει στη γραφική παράσταση της f ισχύει ότι:

$$f(\mu + 1) = -20 \Leftrightarrow 3(\mu + 1)^2 - (\mu + 1) - 44 = -20 \Leftrightarrow 3\mu^2 + 6\mu + 3 - \mu - 1 - 24 = 0 \Leftrightarrow 3\mu^2 + 5\mu - 22 = 0$$

Η τελευταία είναι 2^{ου} βαθμού με $\Delta = 289$ και ρίζες $\mu = 2$ ή $\mu = -\frac{11}{3}$.

Από τις παραπάνω τιμές του μ δεκτή είναι η $\mu = 2$ καθώς είναι ακέραια και επιπλέον $(\mu + 1) \in [-4, 4]$.

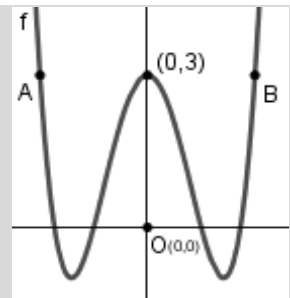
13454. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha x^4 - 4x^2 + \gamma$ η οποία είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

α) Να δείξετε ότι $\gamma = 3$.

β) Αν $A(\alpha^2 - 3, 3)$ και $B(5 - 3\alpha, 3)$ είναι σημεία της γραφικής παράστασης της f , όπως φαίνεται στο σχήμα, να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και να γράψετε τον τύπο της f .

γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

δ) Με τη βοήθεια του σχήματος και την απάντηση του ερωτήματος γ), να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.



Λύση

α) Επειδή το σημείο $(0, 3)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης της f , ισχύει ότι

$$f(0) = 3 \Leftrightarrow \alpha \cdot 0^4 - 4 \cdot 0^2 + \gamma = 3 \Leftrightarrow \gamma = 3.$$

β) Επειδή η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική ως προς τον $y'y$ και τα σημεία A και B έχουν την ίδια τεταγμένη, θα είναι και αυτά συμμετρικά ως προς τον $y'y$.

$$\text{Άρα: } \alpha^2 - 3 = -(5 - 3\alpha) \Leftrightarrow \alpha^2 - 3 = -5 + 3\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$$

Η τελευταία είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 1$ και ρίζες $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$.

Επειδή το σημείο A ανήκει στο 2ο τεταρτημόριο πρέπει: $\alpha^2 - 3 < 0$.

Για $\alpha = 2$ είναι $2^2 - 3 = 1 > 0$ άρα η λύση $\alpha = 2$ απορρίπτεται.

Για $\alpha = 1$ είναι $1^2 - 3 = -2 < 0$ άρα η λύση $\alpha = 1$ είναι δεκτή.

Οπότε, ο τύπος της f είναι: $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$

γ) Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 + 3 = 0$. Θέτουμε $x^2 = \omega$ και γίνεται $\omega^2 - 4\omega + 3 = 0$.

Η τελευταία είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 4$ και ρίζες $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 3$. Άρα

$$x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \text{ ή } x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

δ) Με βάση το σχήμα η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον $x'x$ όταν:

$$-\sqrt{3} < x < -1 \text{ ή } 1 < x < \sqrt{3}.$$

13557. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = x$ που τέμνονται στα σημεία A, B.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B.

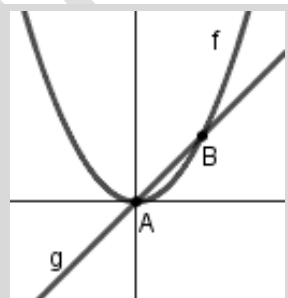
β) Αν $A(0, 0)$, $B(1, 1)$, τότε:

i. Με βάση το σχήμα να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g .

ii. Να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο i. ερώτημα.

γ) Αν $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 < \frac{\alpha}{\beta}$ για τυχαίους πραγματικούς αριθμούς α, β με $\beta \neq 0$,

να δείξετε (με βάση τα παραπάνω ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε) ότι $|\alpha| < |\beta|$.



Λύση

α) Επειδή τα σημεία A, B είναι κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f, g , οι τετμημένες τους είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1.$$

Για $x = 0$ είναι $f(0) = g(0) = 0$ και για $x = 1$ είναι $f(1) = g(1) = 1$,

οπότε $A(0,0)$ και $B(1,1)$.

β) i. Με βάση το σχήμα η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g όταν $0 < x < 1$.

ii. Η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g όταν

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow x^2 < x \Leftrightarrow x^2 - x < 0 \Leftrightarrow x(x-1) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

γ) Με βάση το προηγούμενο σκέλος για $x = \frac{\alpha}{\beta}$ προκύπτει ότι $0 < \frac{\alpha}{\beta} < 1$.

Είναι $\frac{\alpha}{\beta} > 0 \Leftrightarrow \alpha, \beta$ ομόσημοι.

Αν $\alpha, \beta > 0$, τότε $\frac{\alpha}{\beta} < 1 \Leftrightarrow \alpha < \beta$, ενώ $\alpha, \beta < 0$ τότε $\frac{\alpha}{\beta} < 1 \Leftrightarrow \alpha > \beta$. Σε κάθε περίπτωση είναι $|\alpha| < |\beta|$.

14185. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^3 - 2x^2 + x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, για κάθε $x \in A$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$.

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι πάνω από την ευθεία $y = 1$.

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν: $x^3 - 2x^2 + x \neq 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2x + 1) \neq 0 \Leftrightarrow x(x-1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ και $(x-1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$, άρα $A_f = \mathbb{R} - \{0, 1\}$.

β) $f(x) = \frac{x}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x^2 - 2x + 1)} = \frac{1}{(x-1)^2}$.

γ) $f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)^2} = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow |x-1| = 1 \Leftrightarrow$
 $(x-1=1 \Leftrightarrow x=2 \text{ δεκτή}) \text{ ή } (x-1=-1 \Leftrightarrow x=0 \text{ απορρίπτεται}).$

δ) Η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από την ευθεία $y = 1$, όταν
 $f(x) > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)^2} > 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 < 1 \Leftrightarrow |x-1| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$.

14190. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

β) Να αποδείξετε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ τα σημεία της γραφικής παράστασης της f με τετμημένες α και $-\alpha-1$ έχουν την ίδια τεταγμένη.

γ) Θεωρούμε μεταβλητό σημείο M της γραφικής παράστασης της f με τετμημένη $\beta > 0$. Από το M φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες $x'x$, $y'y$ και έστω A και Δ τα σημεία τομής αυτών των ευθειών με τους άξονες, όπου το A ανήκει στον $x'x$ και το Δ στον $y'y$.

Αποδείξτε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου $OAM\Delta$ είναι $[\sqrt{2}(\beta+1)]^2$.

Λύση

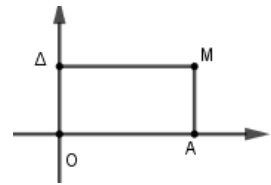
α) Η f είναι τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$, άρα $f(x) = x^2 + x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Είναι $f(-\alpha-1) = (-\alpha-1)^2 + (-\alpha-1) + 1 = \alpha^2 + 2\alpha + 1 - \alpha - 1 + 1 = \alpha^2 + \alpha + 1 = f(\alpha)$ άρα για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ τα σημεία της γραφικής παράστασης της f με τετμημένες α και $-\alpha-1$ έχουν την ίδια τεταγμένη.

γ) Το M έχει συντεταγμένες $(\beta, f(\beta))$. Οι προβολές A, Δ του M στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα έχουν συντεταγμένες $A(\beta, 0)$ και $\Delta(0, f(\beta))$. Το ορθογώνιο OAMΔ έχει περίμετρο:

$$\Pi = 2(OA) + 2(OD) = 2\beta + 2f(\beta) = 2\beta + 2\beta^2 + 2\beta + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Pi = 2\beta^2 + 4\beta + 2 = 2(\beta^2 + 2\beta + 1) = 2(\beta + 1)^2 = [\sqrt{2}(\beta + 1)]^2$$



14225. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(x-2)(x^2-5x+4)}{x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A.

β) Να δείξετε ότι $f(x) = x^2 - 6x + 8, x \in A$.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν είναι πάνω από την ευθεία $y = 3$.

δ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με $g(x) = x^4 - 6x - 4$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f.

Λύση

α) Για να ορίζεται η f πρέπει $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$, άρα $A = \mathbb{R} - \{1\}$.

$$\beta) f(x) = \frac{(x-2)(x^2-x-4x+4)}{x-1} = \frac{(x-2)(x(x-1)-4(x-1))}{x-1} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{(x-2)\cancel{(x-1)}(x-4)}{\cancel{x-1}} = x^2 - 4x - 2x + 8 = x^2 - 6x + 8, x \in A$$

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν είναι πάνω από την ευθεία $y = 3$ όταν

$$f(x) \leq 3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 \leq 3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 \leq 0.$$

Το τριώνυμο $x^2 - 6x + 5$

έχει διακρίνουσα $\Delta = 16$ και ρίζες $x = 1, x = 5$.

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον διπλανό πίνακα.

Επομένως $x^2 - 6x + 5 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 5$.

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$	
$x^2 - 6x + 5$	+	0	-	0	+

δ) Οι τετμημένες των χημείων τομής είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = g(x)$.

$$\text{Είναι } f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = x^4 - 6x - 4 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 12 = 0 \quad (1)$$

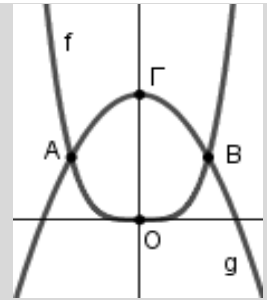
Θέτουμε $x^2 = \omega > 0$ και η (1) γίνεται $\omega^2 - \omega - 12 = 0$.

Η τελευταία είναι 2ου βαθμού με $\Delta = 49$ και ρίζες $\omega = 4$ δεκτή ή $\omega = -3$ απορρίπτεται.

Άρα $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Για $x = 2$ είναι $f(2) = 2^2 - 6 \cdot 2 + 8 = 0$ και για $x = -2$ είναι $f(-2) = (-2)^2 - 6 \cdot (-2) + 8 = 24$, οπότε κοινά σημεία είναι τα $(2, 0)$ και $(-2, 24)$.

14307. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^4$ και $g(x) = 2 - x^2$. Τα σημεία ΑΒ, είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f, g , ενώ Γ είναι το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της g με τον άξονα $y'y$.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ.

Αν $A(-1,1), B(1,1), \Gamma(0,2)$:

β) Με βάση το διπλανό σχήμα να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g .

γ) Να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα β).

Λύση

α) Το σημείο Γ είναι το σημείο τομής της C_g με τον $y'y$, οπότε $g(0) = 2 - 0^2 = 2$, άρα $\Gamma(0,2)$. Οι τετμημένες των σημείων Α, Β είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$.

$$\text{Είναι } f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^4 = 2 - x^2 \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0 \quad (1)$$

Θέτουμε $x^2 = \omega > 0$ και η (1) γίνεται $\omega^2 + \omega - 2 = 0$.

Η τελευταία είναι 2ου βαθμού με $\Delta = 9$ και ρίζες $\omega = 1$ δεκτή ή $\omega = -2$ απορρίπτεται.

Άρα $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Για $x = 1$ είναι $f(1) = 1^4 = 1$ και για $x = -1$ είναι $f(-1) = (-1)^4 = 1$, οπότε κοινά σημεία είναι τα $B(1,1)$ και $A(-1,1)$.

β) Με βάση το σχήμα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g , για τις τιμές του x που είναι μεταξύ των τετμημένων των σημείων Α, Β δηλαδή για $x \in (-1,1)$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g , για τις τιμές του x που είναι λύσεις της ανίσωσης $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x^4 < 2 - x^2 \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 2 < 0$.

Θέτουμε $x^2 = \omega > 0$ και η (1) γίνεται $\omega^2 + \omega - 2 < 0 \Leftrightarrow \omega^2 + \omega - 1 - 1 < 0 \Leftrightarrow (\omega - 1)(\omega + 1) + (\omega - 1) < 0 \Leftrightarrow$

$(\omega - 1)(\omega + 1 + 1) < 0 \Leftrightarrow (\omega - 1)(\omega + 2) < 0 \Leftrightarrow \omega - 1 < 0 \Leftrightarrow \omega < 1 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ που επαληθεύει την απάντηση στο β ερώτημα.

14459. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ και η ευθεία $y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_f της f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

β) Να αποδείξετε ότι αν $0 < \alpha < 1$, τότε η C_f έχει με την ευθεία δυο κοινά σημεία των οποίων να βρείτε τις τετμημένες.

γ) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει $|xf(x)| \leq \frac{1}{2}$.

Λύση

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x^2 + 1 > 0$, ισχύει ότι $f(x) > 0$, οπότε η γραφική παράσταση C_f της f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

β) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_f με την $y = \alpha$, είναι οι

$$\text{λύσεις της εξίσωσης } f(x) = \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{x^2 + 1} = \alpha \Leftrightarrow 1 = \alpha x^2 + \alpha \Leftrightarrow \alpha x^2 = 1 - \alpha \Leftrightarrow x^2 = \frac{1 - \alpha}{\alpha} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1 - \alpha}{\alpha}}.$$

$$\gamma) |xf(x)| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left| \frac{x}{x^2+1} \right| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|x|}{x^2+1} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2|x| \leq x^2+1 \Leftrightarrow |x|^2 - 2|x| + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (|x|-1)^2 \geq 0 \text{ ισχύει.}$$

14665. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = x^3$ που τέμνονται στα σημεία A και B.

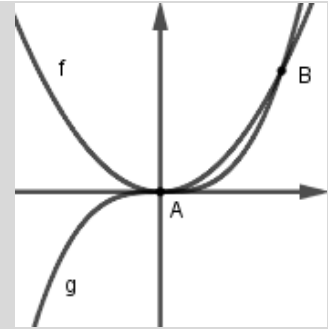
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B.

β) Με βάση το σχήμα ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι για κάθε $x \in (0,1)$ ισχύει $x^3 < x^2$.

γ) Είναι ο κύβος οποιουδήποτε αριθμού μεγαλύτερος από το τετράγωνό του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) Για τον πραγματικό αριθμό $\pi = 3,1415\dots$ να δείξετε ότι:

i. $(\pi-3)^3 < (\pi-3)^2$ **ii.** $\pi^3 - 10\pi^2 + 33\pi - 36 < 0$



Λύση

α) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται στα σημεία A και B, άρα οι τετμημένες των σημείων A και B θα είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$.

$$\text{Είναι } f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 = x^3 \Leftrightarrow x^2 - x^3 = 0 \Leftrightarrow x^2(1-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ 1-x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{cases} \text{ ή}$$

Για $x = 0$ είναι $f(0) = g(0) = 0$, άρα $A(0,0)$ και για $x = 1$ είναι $f(1) = g(1) = 1$, άρα $B(1,1)$.

β) Για να ισχύει $x^3 < x^2$ πρέπει η γραφική παράσταση της g να βρίσκεται κάτω από αυτή της f. Στο σχήμα βλέπουμε ότι για κάθε $x \in (0,1)$, δηλαδή μεταξύ των σημείων A και B, η C_g βρίσκεται κάτω από τη C_f , άρα για κάθε $x \in (0,1)$ ισχύει $x^3 < x^2$.

γ) Όχι δεν είναι ο κύβος οποιουδήποτε αριθμού μεγαλύτερος από το τετράγωνό του αφού στο προηγούμενο σκέλος δείξαμε ότι για τον αριθμό $x \in (0,1)$ ισχύει $x^3 < x^2$.

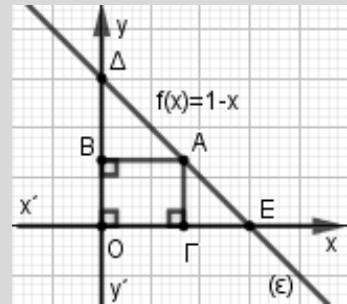
δ) i. Είναι $(\pi-3) \in (0,1)$, οπότε με βάση το β σκέλος είναι $(\pi-3)^3 < (\pi-3)^2$.

ii. Είναι $(\pi-3)^3 < (\pi-3)^2 \Leftrightarrow \pi^3 - 9\pi^2 + 27\pi - 27 < \pi^2 - 6\pi + 9 \Leftrightarrow \pi^3 - 10\pi^2 + 33\pi - 36 < 0$.

14744.α) Να αποδείξετε ότι $x - x^2 \leq \frac{1}{4}$ για κάθε πραγματικό αριθμό x .

Πότε ισχύει το ίσον;

β) Στο διπλανό σχήμα έχει σχεδιασθεί η γραφική παράσταση (ε) της συνάρτησης $f(x) = 1 - x$, $x \in \mathbb{R}$, η οποία τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία E και Δ αντίστοιχα. Ένα μεταβλητό σημείο A, με τετμημένη α , κινείται επί της ευθείας (ε) και μεταξύ των σημείων Δ και E. Φέρνουμε από το A καθέτους στους άξονες και έστω B και Γ τα σημεία τομής με $y'y$ και $x'x$ αντίστοιχα.



i. Να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου ABOΓ.

ii. Να αποδείξετε ότι η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του εμβαδού του μεταβλητού ορθογωνίου ABOΓ είναι $\frac{1}{4}$. Για ποια θέση του σημείου A επιτυγχάνεται αυτή η τιμή;

Λύση

α) $x - x^2 \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ το οποίο ισχύει για κάθε

$x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει όταν $x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

β) i. Είναι $f(0) = 1$ άρα $\Delta(0, 1)$ και $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ άρα $E(1, 0)$. Άρα για την τετμημένη του σημείου A αφού κινείται μεταξύ των Δ και E ισχύει $0 < \alpha < 1$. Επίσης για την τετμημένη του A που είναι $f(\alpha) = 1 - \alpha$ ισχύει $0 < 1 - \alpha < 1 \Leftrightarrow -1 < -\alpha < 0 \Leftrightarrow 0 < \alpha < 1$.

Αφού $A(\alpha, 1 - \alpha)$ τότε $\Gamma(\alpha, 0)$ και $B(0, 1 - \alpha)$. Το εμβαδόν του ABOΓ δίνεται από την συνάρτηση $E(\alpha) = (O\Gamma)(OB) = \alpha(1 - \alpha) = -\alpha^2 + \alpha$, $0 < \alpha < 1$.

ii. Από α) ερώτημα για κάθε $0 < \alpha < 1$ ισχύει $\alpha - \alpha^2 \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow E(\alpha) \leq \frac{1}{4}$ με την ισότητα να ισχύει για $\alpha = \frac{1}{2}$

14745. δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $g(x)$. Κάποια σημεία της γραφικής παράστασης που έχουν ακέραιες συντεταγμένες έχουν σημειωθεί με έντονο τρόπο.

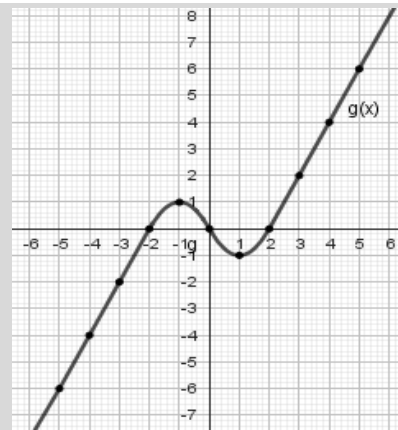
α) Να λύσετε την ανίσωση $-2 \leq g(x) \leq 0$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $|g(x)| \leq 2$.

γ) i. Να βρείτε το πλήθος λύσεων των εξισώσεων

$$g(x) = \frac{4}{5} \text{ και } g(x) = -1.$$

ii. Να βρείτε το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $g(x) = k$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές της παραμέτρου k .



Λύση

α) Ζητάμε τις τετμημένες x των σημείων της γραφικής παράστασης των οποίων οι τεταγμένες $g(x)$ κυμαίνονται από -2 έως μηδέν. Παρατηρούμε ότι αυτό συμβαίνει για $x \in [-3, -2] \cup [0, 2]$.

β) $|g(x)| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq g(x) \leq 2$. Ζητάμε τις τετμημένες x των σημείων της γραφικής παράστασης των οποίων οι τεταγμένες $g(x)$ κυμαίνονται από -2 έως 2 . Παρατηρούμε ότι αυτό συμβαίνει για $x \in [-3, 3]$.

γ) i. Ελέγχουμε πόσα σημεία της γραφικής παράστασης έχουν τεταγμένη $y = \frac{4}{5}$ και διαπιστώνουμε ότι αυτά είναι 3, άρα η εξίσωση $g(x) = \frac{4}{5}$ έχει 3 λύσεις. Αντίστοιχα ελέγχουμε πόσα σημεία της γραφικής παράστασης έχουν τεταγμένη $y = -1$ και διαπιστώνουμε ότι αυτά είναι 2, άρα η εξίσωση $g(x) = -1$ έχει 2 λύσεις.

ii. Το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $g(x) = k$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές της παραμέτρου k , ταυτίζεται με το πλήθος των κοινών σημείων της ευθείας $y = k$ (παράλληλη προς τον άξονα $x'x$) με την γραφική παράσταση.

- Αν $k < -1$ ή $k > 1$ τότε η ευθεία $y = k$ τέμνει τη C_g σε ένα σημείο, οπότε η εξίσωση έχει 1 λύση.
- Αν $k = -1$ ή $k = 1$ τότε η ευθεία $y = k$ τέμνει τη C_g σε δύο σημεία, οπότε η εξίσωση έχει 2 λύσεις.
- Αν $-1 < k < 1$ τότε η ευθεία $y = k$ τέμνει τη C_g σε 3 σημεία, οπότε η εξίσωση έχει 3 λύσεις.

14760. Δίνεται η συνάρτηση: $g(x) = \left[\frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - x - 12}} \right]^3 \cdot (x^2 - 16)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .

β) Να δείξετε ότι $g(x) = \frac{x+4}{x+3}$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της.

γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τους άξονες.

Λύση

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση g πρέπει $x^2 - x - 12 > 0$.

Το τριώνυμο $x^2 - x - 12$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 1 + 48 = 49$ και ρίζες

$$x_1 = \frac{1+7}{2} = 4, \quad x_2 = \frac{1-7}{2} = -3.$$

x	$-\infty$	-3	4	$+\infty$	
$x^2 - x - 12$	+	○	-	○	+

Με βάση το πρόσημο του τριωνύμου που φαίνεται στον

διπλανό πίνακα, είναι $x^2 - x - 12 > 0 \Leftrightarrow x < -3$ ή $x > 4$, άρα $A_g = (-\infty, -3) \cup (4, +\infty)$.

β) Για κάθε $x \in A_g$ είναι

$$g(x) = \left[\frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - x - 12}} \right]^3 \cdot (x^2 - 16) = \frac{1}{x^2 - x - 12} \cdot (x^2 - 16) = \frac{(x-4)(x+4)}{(x+3)(x-4)} \Leftrightarrow g(x) = \frac{x+4}{x+3}$$

γ) Είναι $g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x+4}{x+3} = 0 \Leftrightarrow x+4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$ δεκτή.

Η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(-4, 0)$, δεν τέμνει τον $y'y$ αφού το 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

14763. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3\sqrt{x^2 - 8x + \lambda}}{x - 4} + 2$, για $x \neq 4$ και $\lambda \geq 16$.

α) Να βρείτε το $\lambda \geq 16$ ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο της $M(0, -1)$.

β) Αν $\lambda = 16$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 4 \\ 5, & x > 4 \end{cases}$.

ii. Να σχεδιάσετε σε σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση της f .

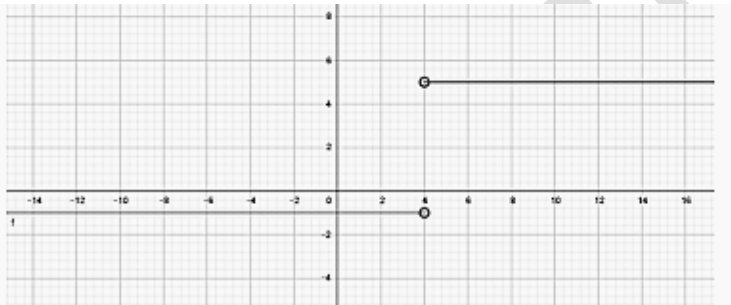
iii. Για $x < 4$, να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f των οποίων η απόστασή τους από το σημείο $A(-1, -1)$ είναι 10 μονάδες μήκους.

Λύση

α) Πρέπει $f(0) = -1 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{\lambda}}{-4} + 2 = -1 \Leftrightarrow \Leftrightarrow -\frac{3\sqrt{\lambda}}{4} = -3 \Leftrightarrow 3\sqrt{\lambda} = 12 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda} = 4 \Leftrightarrow \lambda = 16$

β) i. Για $\lambda = 16$ είναι $f(x) = \frac{3\sqrt{x^2 - 8x + 16}}{x - 4} + 2 = \frac{3\sqrt{(x-4)^2}}{x-4} + 2 =$
 $= \frac{3|x-4|}{x-4} + 2 = \begin{cases} \frac{-3(x-4)}{x-4} + 2, & x < 4 \\ \frac{3(x-4)}{x-4} + 2, & x > 4 \end{cases}$. Άρα είναι $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 4 \\ 5, & x > 4 \end{cases}$.

ii.



iii. Το A είναι σημείο της C_f και αφού για $x < 4$ η f είναι σταθερή και ίση με -1 τότε τα σημεία έχουν την ίδια τεταγμένη. Άρα αν B και Γ τα σημεία που απέχουν 10 μονάδες από το A τότε η τεταγμένη του B είναι $x = -1 - 10 = -11$ και η τεταγμένη του Γ είναι $x = -1 + 10 = 9$. Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι τα $B(-1, -11)$ και $\Gamma(-1, 9)$.

14771. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x-a}$ όπου $a \in \mathbb{R}$.

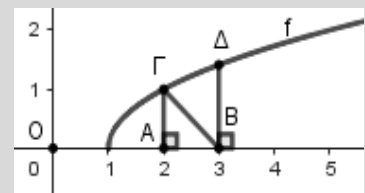
α) Με βάση το σχήμα, να δείξετε ότι $a = 1$.

β) Αν $a = 1$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

γ) i. Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων Γ και Δ είναι $(2, 1)$ και $(3, \sqrt{2})$ αντίστοιχα.

ii. Να βρείτε το μήκος του τμήματος $B\Gamma$.

iii. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.



Λύση

α) Είναι $f(1) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-a} = 0 \Leftrightarrow 1-a = 0 \Leftrightarrow a = 1$.

β) Είναι $f(x) = \sqrt{x-1}$ και για να ορίζεται πρέπει $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ άρα έχει πεδίο ορισμού το $[1, +\infty)$.

γ) i. Είναι $f(2) = \sqrt{2-1} = 1$ άρα $\Gamma(2,1)$ και $f(3) = \sqrt{3-1} = \sqrt{2}$ άρα $\Delta(3, \sqrt{2})$.

ii. Είναι $B(3,0)$ άρα $(B\Gamma) = \sqrt{(2-3)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$

iii. Είναι $(B\Delta) = |\sqrt{2} - 0| = \sqrt{2} = (B\Gamma)$ άρα είναι ισοσκελές.

14786. Δίνονται τα σημεία $A(\lambda, 1)$ και $B(2-\lambda^2, \mu)$ με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

α) Αν τα σημεία A, B είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$, να βρείτε τις τιμές των λ, μ .

β) Αν επιπλέον το σημείο A βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο του ορθοκανονικού συστήματος, να βρείτε την τιμή του λ .

γ) Για $\lambda = -2$ και $\mu = -1$

i. Να βρείτε την απόσταση των σημείων A, B.

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAB, όπου O η αρχή των αξόνων.

Λύση

α) Αφού τα A, B είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$ τότε έχουν αντίθετες τεταγμένες και ίδιες

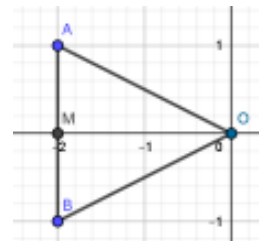
$$\text{τετμημένες άρα } \begin{cases} \lambda = 2 - \lambda^2 \\ 1 = -\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \\ \mu = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0 \\ \mu = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -2 \\ \mu = -1 \end{cases}$$

β) Αφού το A βρίσκεται στο 2° τεταρτημόριο τότε η τετμημένη του είναι αρνητική άρα $\lambda = -2$.

γ) i. Για $\lambda = -2$ και $\mu = -1$ είναι $A(-2, 1)$ και $B(-2, -1)$. Είναι $(AB) = |-1 - 1| = 2$.

ii. Έστω M η προβολή των A και B πάνω στον άξονα $x'x$ άρα $M(-2, 0)$.

$$\text{Είναι } (AOB) = \frac{1}{2}(AB)(MO) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot |-2 - 0| = 2$$



14810. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 7x + \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη $y = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 10$.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση C_f της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

γ) Έστω $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$, $\alpha < \beta$ δυο σημεία της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha < \frac{2\alpha + 3\beta}{5} < \beta$.

ii. Να εξετάσετε αν το σημείο της C_f με τετμημένη $x_0 = \frac{2\alpha + 3\beta}{5}$ βρίσκεται πάνω ή κάτω από τον άξονα $x'x$.

Λύση

α) Επειδή η C_f διέρχεται από το σημείο $(0, 10)$ είναι $f(0) = 10 \Leftrightarrow \kappa = 10$.

$$\beta) f(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 < 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-5) < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 5$$

$$\gamma) \text{ i. } \alpha < \frac{2\alpha+3\beta}{5} < \beta \Leftrightarrow 5\alpha < 2\alpha+3\beta < 5\beta \Leftrightarrow \begin{cases} 5\alpha < 2\alpha+3\beta \\ 2\alpha+3\beta < 5\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\alpha-2\alpha < +3\beta \\ 2\alpha < 5\beta-3\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha < 3\beta \\ 2\alpha < 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \alpha < \beta \text{ ισχύει}$$

ii. Επειδή τα σημεία A, B βρίσκονται κάτω από τον x' χ, είναι $2 < \alpha < \beta < 5$.

Επειδή $\alpha < \frac{2\alpha+3\beta}{5} < \beta$, είναι $2 < \frac{2\alpha+3\beta}{5} < 5$, οπότε το σημείο της C_f με τετμημένη $x_0 = \frac{2\alpha+3\beta}{5}$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα x' χ.

14925. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της

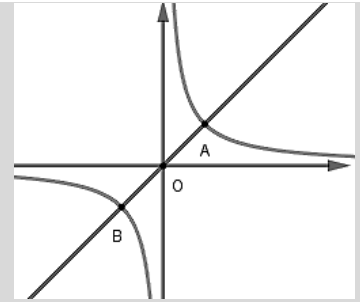
$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ και η ευθεία AB με εξίσωση } y = x.$$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των A, B και να δείξετε ότι το O είναι το μέσο του AB.

Έστω $M(x, y)$ τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f.

β) Να δείξετε ότι το συμμετρικό M' του M ως προς το $O(0,0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

γ) Αν $A(1,1), B(-1,-1), M'(-x,-y)$ να δείξετε ότι $(AB) \leq (MM')$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ και να εξετάσετε πότε $(AB) = (MM')$.



Λύση

α) Οι συντεταγμένες των σημείων A, B είναι οι λύσεις του συστήματος
$$\begin{cases} y = x \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\text{Είναι } x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Αν $x = 1$, τότε $y = 1$ και $A(1,1)$, ενώ αν $x = -1$, τότε $y = -1$ και $B(-1,-1)$.

Το μέσο του AB έχει τετμημένη $\frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$ και τεταγμένη $\frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$, δηλαδή είναι το O.

β) Επειδή το M είναι σημείο της γραφικής παράστασης της f, είναι $y = \frac{1}{x}$

Το $M'(-x, -y)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f, αν και μόνο αν $-y = \frac{1}{-x} \Leftrightarrow -y = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$ που ισχύει.

$$\gamma) (AB) \leq (MM') \Leftrightarrow \sqrt{(-1-1)^2 + (-1-1)^2} \leq \sqrt{(-x-x)^2 + (-y-y)^2} \Leftrightarrow \sqrt{8} \leq \sqrt{4x^2 + 4y^2} \Leftrightarrow$$

$$8 \leq 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \Leftrightarrow 2 \leq x^2 + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow 2x^2 \leq x^4 + 1 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 \geq 0 \text{ ισχύει.}$$

Η ισότητα $(AB) = (MM')$ ισχύει όταν $(x^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ που σημαίνει ότι ισχύει όταν τα σημεία M, M' ταυτίζονται με τα σημεία A, B.

14926. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = |x|$ και $g(x) = 2 - x^2$.

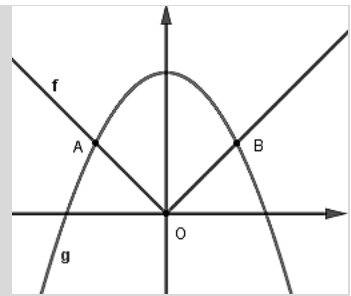
Τα Α, Β είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f, g .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β.

β) Αν $A(-1,1)$ και $B(1,1)$,

i. Με βάση το παραπάνω σχήμα, να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει ότι: $f(x) < g(x)$.

ii. Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση $f(x) < g(x)$ επαληθεύοντας την απάντηση στο ερώτημα βi.



Λύση

α) Οι συντεταγμένες των σημείων Α, Β είναι οι λύσεις του συστήματος $\begin{cases} y = |x| \\ y = 2 - x^2 \end{cases}$.

$$\text{Είναι } |x| = 2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + |x| - 2 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 + |x| - 2 = 0 \quad (1)$$

Θέτουμε $|x| = \omega > 0$ και η (1) γίνεται: $\omega^2 + \omega - 2 = 0$.

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9$ και ρίζες

$$\omega_1 = \frac{-1+3}{2} = 1 \text{ δεκτή, } \omega_2 = \frac{-1-3}{2} = -2 \text{ απορρίπτεται.}$$

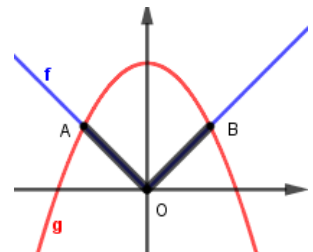
Άρα $|x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Αν $x = 1$, τότε $y = |1| = 1$, οπότε το Β έχει συντεταγμένες $(1, 1)$.

Αν $x = -1$, τότε $y = |-1| = 1$, οπότε το Α έχει συντεταγμένες $(-1, 1)$.

β) i. Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) < g(x)$ είναι οι τετμημένες των σημείων της f που βρίσκονται κάτω από τη g . Τα σημεία αυτά βρίσκονται μεταξύ των Α και Β όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, οπότε οι λύσεις είναι $x \in (-1, 1)$.

ii. $f(x) < g(x) \Leftrightarrow |x| < 2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + |x| - 2 < 0 \Leftrightarrow |x|^2 + |x| - 2 < 0 \Leftrightarrow \omega^2 + \omega - 2 < 0 \Leftrightarrow -2 < \omega < 1 \Leftrightarrow -2 < |x| < 1 \Leftrightarrow (|x| > -2 \text{ ισχύει}) \text{ και } |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \text{ που επαληθεύει την απάντηση στο βi ερώτημα.}$



14961. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x - 1$. Αν $A(\omega, 0)$, $B(\varphi, 0)$

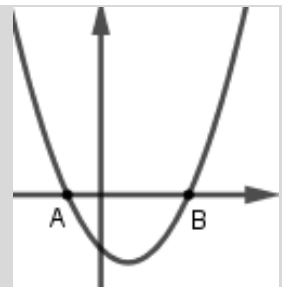
α) Να δείξετε ότι

i. $\omega + \varphi = 1$ **ii.** $\omega \cdot \varphi = -1$

β) Να δείξετε ότι $(OB) > (OA)$.

γ) Αν ένας θετικός αριθμός β είναι μεγαλύτερος από τον αντίστροφό του και η διαφορά τους ξεπερνάει τη μία μονάδα, να δείξετε ότι $\beta > \varphi$.

δ) Να δείξετε ότι $\varphi < \frac{5}{3}$.



Λύση

α) Επειδή η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία Α, Β, οι τετμημένες τους ω, φ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$

Από τους τύπους του Vieta είναι $S = -\frac{-1}{1} = 1$ και $P = \frac{-1}{1} = -1$, άρα

i. $S = \omega + \varphi = 1$ και ii. $P = \omega \cdot \varphi = -1$

β) Επειδή το O βρίσκεται μεταξύ των A και B, είναι $\omega < 0 < \varphi$.

Είναι $(OB) = |\varphi| = \varphi$ και $(OA) = |\omega| = -\omega$.

$(OB) > (OA) \Leftrightarrow \varphi > -\omega \Leftrightarrow \varphi + \omega > 0 \Leftrightarrow 1 > 0$ που ισχύει

γ) Επειδή ο β είναι μεγαλύτερος από τον αντίστροφό του ισχύει ότι $\beta > \frac{1}{\beta}$ Επειδή η διαφορά τους

ξεπερνάει τη μία μονάδα, ισχύει ότι $\beta - \frac{1}{\beta} > 1 \Leftrightarrow \beta^2 - 1 > \beta \Leftrightarrow \beta^2 - \beta - 1 > 0 \Leftrightarrow f(\beta) > 0$.

Στο σχήμα παρατηρούμε ότι τα σημεία της γραφικής παράστασης της f με θετική τετμημένη είναι αυτά που βρίσκονται αριστερά του A ή δεξιά του B, άρα $\beta < \omega$ ή $\beta > \varphi$. Επειδή $\beta > 0$, είναι $\beta > \varphi$.

δ) Είναι $\frac{5}{3} - \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3} - \frac{3}{5} = \frac{16}{5} > 1$, οπότε από το γ) ερώτημα είναι $\frac{5}{3} > \varphi$.

16153. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 1 + \frac{4}{x^2}$.

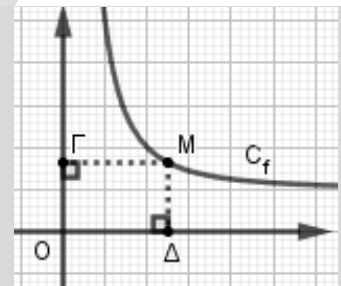
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τους άξονες x'x και y'y.

γ) Έστω $\alpha > 0$ η τετμημένη ενός τυχαίου σημείου M της γραφικής παράστασης της f. Αν ονομάσουμε E το εμβαδόν του ορθογωνίου ΟΓΜΔ του σχήματος, να αποδείξετε ότι:

i. $E = \alpha + \frac{4}{\alpha}$.

ii. $E \geq 4$.



Λύση

α) Η συνάρτηση f ορίζεται όταν $x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$, άρα $D_f = \mathbb{R}^*$.

β) Για κάθε $x \neq 0$ είναι $\frac{4}{x^2} > 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{4}{x^2} > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$, οπότε η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τον άξονα x'x.

Το 0 δεν περιέχεται στο πεδίο ορισμού της f οπότε η γραφική της παράσταση δεν τέμνει τον άξονα y'y.

γ) i. Αν η τετμημένη του M είναι α, τότε η τεταγμένη του είναι $y = f(\alpha) = 1 + \frac{4}{\alpha^2}$.

Είναι $(O\Delta) = (M\Gamma) = \alpha$ και $(M\Delta) = (O\Gamma) = y = 1 + \frac{4}{\alpha^2}$.

Είναι $E = (O\Gamma)(O\Delta) = \left(1 + \frac{4}{\alpha^2}\right)\alpha = \alpha + \frac{4}{\alpha}$.

ii. $E \geq 4 \Leftrightarrow \alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4 \Leftrightarrow \alpha^2 + 4 \geq 4\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 2)^2 \geq 0$ ισχύει

32742. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και της συνάρτησης $g(x) = -2x + 2$.

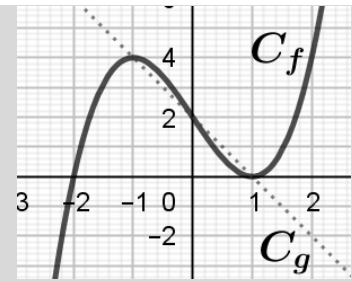
Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε:

α) τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = -2x + 2$.

β) τις τιμές $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$.

γ) τις τιμές του x , για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g .

δ) τις τιμές του x , για τις οποίες η παράσταση $A = \sqrt{f(x) + 2x - 2}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού.



Λύση

α) Πρόκειται για τις τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g . Είναι $x = -1$ ή $x = 0$ ή $x = 1$

β) $f(-1) = 4$, $f(0) = 2$ και $f(1) = 0$

γ) $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$

δ) Πρέπει $f(x) + 2x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq -2x + 2 \Leftrightarrow x \in [-1, 0] \cup [1, +\infty)$

33597. Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με $f(x) = |x - 2|$ και $g(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Με τη βοήθεια του παραπάνω σχήματος, να βρείτε

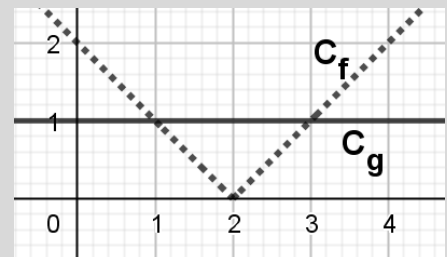
i) τα σημεία τομής των C_f και C_g .

ii) τις τιμές του x , για τις οποίες η C_f είναι κάτω από τη C_g .

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στο προηγούμενο ερώτημα.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού

αριθμού η παράσταση $A = \frac{\sqrt{1 - f(x)}}{f(x)}$.



Λύση

α) i) Τα σημεία τομής των C_f και C_g είναι τα $A(-1, 1)$ και $B(3, 1)$

ii) $x \in (1, 3)$

β) i) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow |x - 2| = 1 \Leftrightarrow x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 3$ ή $x - 2 = -1 \Leftrightarrow x = 1$

Άρα τα σημεία τομής των C_f και C_g είναι τα $A(-1, 1)$ και $B(3, 1)$

ii) $f(x) < g(x) \Leftrightarrow |x - 2| < 1 \Leftrightarrow -1 < x - 2 < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 3 \Leftrightarrow x \in (1, 3)$

γ) Πρέπει $1 - f(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq 1 \Leftrightarrow x \in [1, 3]$ και $f(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

Άρα η παράσταση A έχει νόημα πραγματικού αριθμού για $x \in [1, 2) \cup (2, 3]$.

33701. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (x-1)^2 - 4$ και $g(x) = |x-1| + 2$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

β) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

Λύση

α) Αρκεί να λύσουμε την ανίσωση $f(x) > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 > 4 \Leftrightarrow |x-1| > 2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x-1 < -2 \Leftrightarrow x < -1) \text{ ή } (x-1 > 2 \Leftrightarrow x > 3)$

β) Είναι $|x-1| \geq 0 \Leftrightarrow |x-1| + 2 \geq 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 = |x-1| + 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 - |x-1| - 6 = 0 \Leftrightarrow |x-1|^2 - |x-1| - 6 = 0$ (1)

Θέτουμε $|x-1| = y \geq 0$ άρα $(1) \Leftrightarrow y^2 - y - 6 = 0 \Leftrightarrow (y-3)(y+2) = 0 \Leftrightarrow y = 3$ ή $y = -2$ απορρίπτεται.

Άρα $(1) \Leftrightarrow y = 3 \Leftrightarrow |x-1| = 3 \Leftrightarrow (x-1 = 3 \Leftrightarrow x = 4) \text{ ή } (x-1 = -3 \Leftrightarrow x = -2)$

Είναι $f(4) = 9 - 4 = 5$ και $f(-2) = 5$ άρα οι γραφικές παραστάσεις τέμνονται στα σημεία $A(4,5)$ και $B(-2,5)$.

33894. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{|2-x|}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} x-3, & x > 2 \\ -x+3, & x \leq 2 \end{cases}$.

γ) i. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f .

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$.

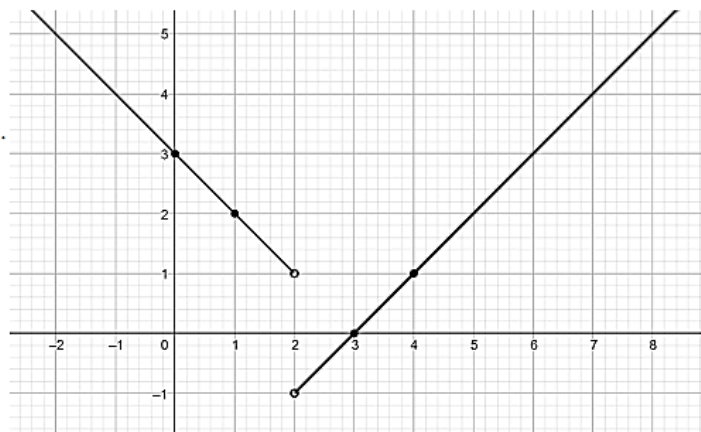
Λύση

α) Για να ορίζεται η f πρέπει $|2-x| \neq 0 \Leftrightarrow 2-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ άρα έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{2\}$.

β) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{|2-x|} = \frac{(x-3)(x-2)}{|2-x|} =$

$$\begin{cases} \frac{(x-3)(\cancel{x-2})}{\cancel{x-2}}, & 2-x < 0 \\ \frac{(x-3)(\cancel{x-2})}{-(\cancel{x-2})}, & 2-x > 0 \end{cases} = \begin{cases} x-3, & x > 2 \\ 3-x, & x < 2 \end{cases}$$

γ) i.



ii. 1^{ος} τρόπος: Από την γραφική παρατηρούμε ότι τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $A(3,0)$ και τον $y'y$ στο σημείο $B(0,3)$.

2^{ος} τρόπος: Είναι $f(0) = 3$ άρα τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $B(0,3)$.

$$\text{Για } x \neq 2 \text{ είναι } f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 5x + 6}{|2 - x|} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

άρα τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(3,0)$.

δ) 1^{ος} τρόπος: Από την γραφική βλέπουμε ότι η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ για κάθε $x \in (2,3)$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ για $x = 3$ άρα $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (2,3]$.

2^{ος} τρόπος: Για $x > 2$ είναι $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$ άρα $x \in (2,3]$.

Για $x < 2$ είναι $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow 3 - x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$ αδύνατη.

33895. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x^2 - 2(\alpha + 3)x + 3\alpha}{2x - 3}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = 2x - \alpha$, για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f .

γ) Να βρεθεί η τιμή του α αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, -1)$.

δ) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Λύση

α) Πρέπει $2x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq 3 \Leftrightarrow x \neq \frac{3}{2}$, άρα $A_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{3}{2} \right\}$

β) Το τριώνυμο $4x^2 - 2(\alpha + 3)x + 3\alpha$, έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = [-2(\alpha + 3)]^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3\alpha = 4(\alpha^2 + 6\alpha + 9) - 48\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Delta = 4\alpha^2 + 24\alpha + 36 - 48\alpha = 4\alpha^2 - 24\alpha + 36 = (2\alpha - 6)^2$$

$$\text{και ρίζες } x_1 = \frac{2(\alpha + 3) + 2\alpha - 6}{2 \cdot 4} = \frac{2\alpha + 6 + 2\alpha - 6}{8} = \frac{4\alpha}{8} = \frac{\alpha}{2} \text{ και}$$

$$x_2 = \frac{2(\alpha + 3) - (2\alpha - 6)}{2 \cdot 4} = \frac{2\alpha + 6 - 2\alpha + 6}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Είναι } 4x^2 - 2(\alpha + 3)x + 3\alpha = 4\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) = (2x - \alpha)(2x - 3) \text{ και}$$

$$f(x) = \frac{4x^2 - 2(\alpha + 3)x + 3\alpha}{2x - 3} = \frac{(2x - \alpha)(2x - 3)}{2x - 3} = 2x - \alpha$$

γ) Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, -1)$ είναι:

$$f(1) = -1 \Leftrightarrow 2 - \alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = 3$$

$$\text{δ) } f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \alpha = 0 \Leftrightarrow 2x = \alpha \Leftrightarrow x = \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{Αν } \frac{\alpha}{2} \neq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \alpha \neq 3 :$$

Έχει σημείο τομής με τον άξονα $x'x$ το σημείο $A\left(\frac{\alpha}{2}, 0\right)$.

Αν $\alpha = 3$ δεν έχει σημείο τομής με τον $x'x$.

Είναι $f(0) = -\alpha$, άρα έχει σημείο τομής το σημείο $B(0, -\alpha)$

34309. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = x + \alpha$, με $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Για $\alpha = 1$, να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δυο σημεία.

γ) Για $\alpha > 1$, να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ομόσημες ή ετερόσημες.

Λύση

α) Για $\alpha = 1$ είναι $g(x) = x + 1$. Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 1 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1$$

$f(0) = g(0) = 1$ και $f(1) = g(1) = 2$, άρα τα κοινά σημεία τους είναι τα $A(0, 1)$ και $B(1, 2)$.

β) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 1 = x + \alpha \Leftrightarrow x^2 - x + 1 - \alpha = 0$. Για να τέμνονται σε δυο σημεία θα πρέπει

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (1 - \alpha) > 0 \Leftrightarrow 1 - 4 + 4\alpha > 0 \Leftrightarrow 4\alpha > 3 \Leftrightarrow \alpha > \frac{3}{4}$$

γ) Οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = g(x)$. Για $\alpha > \frac{3}{4}$ έχει δύο ρίζες x_1, x_2 πραγματικές και άνισες. Από τις σχέσεις Vieta: $P = x_1 \cdot x_2 = 1 - \alpha < 0$, άρα οι x_1, x_2 είναι ετερόσημες.

35385. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \beta$, $g(x) = x + \beta$, όπου $x \in \mathbb{R}$ και β σταθερός πραγματικός αριθμός. Είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της $g(x)$ διέρχεται από το σημείο

$$M\left(\frac{3\beta}{2}, -3 - \frac{\beta}{2}\right).$$

α) Να αποδείξετε ότι $\beta = -1$.

β) Για $\beta = -1$

i) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ με τους άξονες $x'x$, $y'y$.

ii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x)$ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)$.

iii) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{g(x)}{f(x)} = 3$.

Λύση

α) Αφού η C_g διέρχεται από το $M\left(\frac{3\beta}{2}, -3 - \frac{\beta}{2}\right)$ τότε

$$g\left(\frac{3\beta}{2}\right) = -3 - \frac{\beta}{2} \Leftrightarrow \frac{3\beta}{2} + \beta = -3 - \frac{\beta}{2} \Leftrightarrow 3\beta + 2\beta = -6 - \beta \Leftrightarrow 5\beta = -6 - \beta \Leftrightarrow 6\beta = -6 \Leftrightarrow \beta = -1$$

β) Για $\beta = -1$ είναι $f(x) = x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x - 1, x \in \mathbb{R}$

i. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(-1, 0)$ και $B(1, 0)$. Επίσης $f(0) = 0^2 - 1 = -1$ άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0, -1)$.

ii. $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x^2 - 1 < x - 1 \Leftrightarrow x^2 - x < 0 \Leftrightarrow x(x - 1) < 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x \in (0, 1)$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x^2 - x$		+	-	+

iii. Η εξίσωση $\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{g(x)}{f(x)} = 3$ ορίζεται όταν

$$\begin{cases} g(x) \neq 0 \\ f(x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \neq 0 \\ x^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 1 \text{ και } x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 1 \text{ και } x \neq -1$$

$$\text{Για } x \neq 1 \text{ και } x \neq -1: \frac{f(x)}{g(x)} + \frac{g(x)}{f(x)} = 3 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x - 1} + \frac{x - 1}{x^2 - 1} = 3 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} + \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = 3 \Leftrightarrow$$

$$x + 1 + \frac{1}{x + 1} = 3 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + 1 = 3(x + 1) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + 1 = 3x + 3 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = 5$ άρα η εξίσωση έχει ρίζες $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ και $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

35409. Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - \lambda x + 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

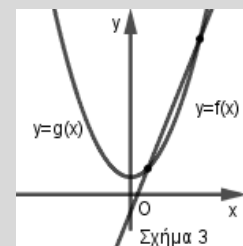
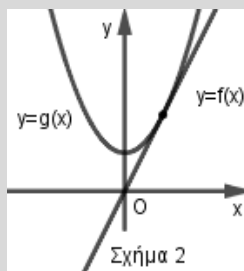
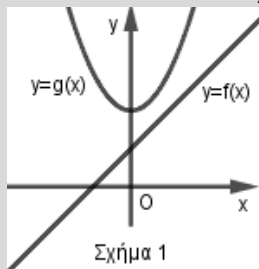
α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = \lambda^2 - 4$.

β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g που είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ με $f(x) = \lambda x - \lambda + 2$ και $g(x) = x^2 - \lambda + 3, \lambda \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση από την οποία μπορούμε να βρούμε τις τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των f και g είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^2 - \lambda x + 1 = 0.$$

ii. Στο καθένα από τα επόμενα σχήματα δίνεται οι γραφικές παραστάσεις των δυο συναρτήσεων για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου λ . Με δεδομένο ότι $\lambda \in \{1, 2, 4\}$, να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ σε καθένα από τα σχήματα, δικαιολογώντας την απάντησή σας.



Λύση

α) $\Delta = \lambda^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = \lambda^2 - 4.$

β) i. Οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των f και g είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \lambda x - \lambda + 2 = x^2 - \lambda + 3 \Leftrightarrow x^2 - \lambda + 3 - \lambda x + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \lambda x + 1 = 0$

ii. Αν $\lambda=1$ τότε η εξίσωση γίνεται $x^2 - x + 1 = 0$, έχει διακρίνουσα $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, άρα είναι αδύνατη. Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν έχουν κοινά σημεία και αυτό συμβαίνει στο σχήμα 1.

Αν $\lambda=2$ τότε η εξίσωση γίνεται $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$, δηλαδή οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν 1 μόνο κοινό σημείο και αυτό συμβαίνει στο σχήμα 2.

Αν $\lambda=4$ τότε η εξίσωση γίνεται $x^2 - 4x + 1 = 0$, έχει διακρίνουσα $\Delta = 16 - 4 = 12 > 0$, άρα έχει δύο λύσεις, δηλαδή οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν 2 κοινά σημεία και αυτό συμβαίνει στο σχήμα 3.

35410. Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = 4\lambda^2 - 16\lambda - 20$.

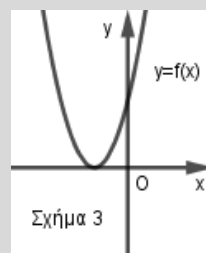
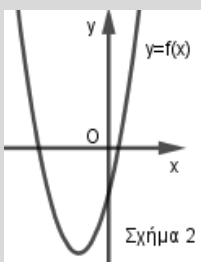
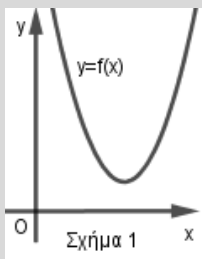
β) Θεωρούμε την συνάρτηση f , που είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5.$$

Στο καθένα από τα επόμενα σχήματα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου λ .

i. Για τα δύο πρώτα σχήματα δίνεται ότι η παράμετρος $\lambda \in \{-2, 4\}$. Να βρείτε σε ποια τιμή του λ αντιστοιχεί το καθένα από τα σχήματα αυτά, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

ii. Για το σχήμα 3 να βρείτε τις δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει η παράμετρος $\lambda \in \mathbb{R}$, δικαιολογώντας την απάντησή σας.



Λύση

α) $\Delta = (-2\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4\lambda + 5) = 4\lambda^2 - 16\lambda - 20.$

β) i. Αν $\lambda = -2$ τότε το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = 4(-2)^2 - 16(-2) - 20 = 16 + 32 - 20 = 28 > 0$, οπότε έχει δύο ρίζες και η γραφική παράσταση της f έχει δύο κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$, άρα το σχήμα 2 αντιστοιχεί σε αυτή τη περίπτωση.

Αν $\lambda = 4$ τότε το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = 4 \cdot 4^2 - 16 \cdot 4 - 20 = 64 - 64 - 20 = -20 < 0$, οπότε το τριώνυμο δεν έχει ρίζες και η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τον $x'x$, άρα το σχήμα 1 αντιστοιχεί στη περίπτωση αυτή.

ii. Επειδή η γραφική παράσταση της f έχει 1 κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$, το τριώνυμο έχει μία ρίζα και αυτό συμβαίνει όταν $\Delta = 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 16\lambda - 20 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$ ή $\lambda = 5$

36657. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2$ και $g(x) = \lambda x + (1 - \lambda)$, $x \in \mathbb{R}$ και λ παράμετρος με $\lambda \neq 0$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

β) Για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό;

γ) Αν $\lambda \neq 2$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g , να βρεθεί η παράμετρος λ ώστε να ισχύει: $(x_1 + x_2)^2 = |x_1 + x_2| + 2$.

Λύση

α) Για να βρούμε τα κοινά σημεία των συναρτήσεων f και g λύνουμε την εξίσωση :

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 = \lambda x + 1 - \lambda \Leftrightarrow x^2 - \lambda x - 1 + \lambda = 0$$

$$\Delta = (-\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1 + \lambda) = \lambda^2 + 4 - 4\lambda = (\lambda - 2)^2 \geq 0$$

Άρα η δευτεροβάθμια εξίσωση $x^2 - \lambda x - 1 + \lambda = 0$ (1) έχει μία τουλάχιστον ρίζα. Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

β) Για $\lambda = 2$ είναι $\Delta = 0$, τότε η (1) έχει μία διπλή ρίζα την $x = \frac{\lambda}{2} = \frac{2}{2} = 1$ και $f(1) = g(1) = 1$. Επομένως έχουν κοινό σημείο το $(1, 1)$.

γ) Από τις σχέσεις Vieta : $S = x_1 + x_2 = \lambda$ και $P = x_1 \cdot x_2 = -1 + \lambda$.

$$\text{Άρα : } (x_1 + x_2)^2 = |x_1 + x_2| + 2 \Leftrightarrow \lambda^2 - |\lambda| - 2 = 0 \Leftrightarrow |\lambda|^2 - |\lambda| - 2 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Θέτουμε } |\lambda| = \omega \quad (2), \text{ τότε } (1) \xRightarrow{(2)} \omega^2 - \omega - 2 = 0 \Leftrightarrow \omega = -1 \text{ ή } \omega = 2$$

$$(2) \xRightarrow{\omega=-1} |\lambda| = -1 \text{ αδύνατη και } (2) \xRightarrow{\omega=2} |\lambda| = 2 \xRightarrow{\lambda \neq 2} \lambda = -2$$

36676. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha x - \alpha + 2$ και $g(x) = x^2 - \alpha + 3$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, 2)$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α .

β) Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$.

ii) Για $\alpha = 2$ υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g ;

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

γ) Να αποδείξετε ότι το πλήθος των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των f και g είναι ίδιο με το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^2 - \alpha x + 1 = 0$ και στη συνέχεια ότι για $\alpha = 3$, $\alpha = -2$, $\alpha = 1$ έχουν αντίστοιχα δύο, ένα, κανένα σημεία τομής.

Λύση

α) Είναι $f(1) = \alpha - \alpha + 2 = 2$, άρα η C_f διέρχεται από το σημείο $(1, 2)$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α .

β) i. Επειδή οι γραφικές παραστάσεις των f , g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, ισχύει ότι $f(1) = g(1) \Leftrightarrow 2 = 1 - \alpha + 3 \Leftrightarrow \alpha = 2$.

ii. Για $\alpha = 2$ είναι $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2 - 2 + 3 = x^2 + 1$ και

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x = x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$, οπότε δεν έχουν άλλο κοινό σημείο σε αυτή τη περίπτωση.

γ) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow ax - a + 2 = x^2 - a + 3 \Leftrightarrow x^2 - ax + 1 = 0$.

Η τελευταία είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = a^2 - 4$.

Για $a = 3$ είναι $\Delta = 3^2 - 4 = 5 > 0$, οπότε η εξίσωση έχει 2 λύσεις και οι f, g δύο κοινά σημεία.

Για $a = -2$ είναι $\Delta = 4 - 4 = 0$, οπότε η εξίσωση έχει 1 λύση και οι f, g ένα κοινό σημείο.

Για $a = 1$ είναι $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, οπότε η εξίσωση δεν έχει λύση και οι f, g δεν έχουν κοινό σημείο.

37206. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 3x + 2$ και $g(x) = x + 1, x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο στη συνέχεια να προσδιορίσετε.

β) Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = x + a$. Να δείξετε ότι:

i) Αν $a > 1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h έχουν δύο κοινά σημεία.

ii) Αν $a < 1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h δεν έχουν κοινά σημεία.

Λύση

α) Η τετμημένη του κοινού σημείου βρίσκεται από την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

Είναι $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$. Τότε $f(-1) = g(-1) = 0$, άρα κοινό σημείο είναι το $M(-1, 0)$.

β) Για τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, h έχουμε:

$f(x) = h(x) \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = x + a \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 - a = 0 \quad (1)$.

Η (1) είναι εξίσωση 2ου βαθμού και έχει διακρίνουσα

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2 - a) = 4 - 8 + 4a = 4a - 4 = 4(a - 1)$

i) Αν $a > 1$, τότε $\Delta > 0$ και η (1) έχει 2 ρίζες πραγματικές και άνισες, άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h έχουν δύο κοινά σημεία.

ii) Αν $a < 1$, τότε $\Delta < 0$ και η (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες, άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h δεν έχουν κοινά σημεία.

Θέμα 3ο

14604. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} 2x-5, & x \leq 3 \\ x^2, & 3 < x < 10 \end{cases}$.

α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f σε μορφή διαστήματος.

β) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$.

γ) Διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f που έχει τεταγμένη $y = 21$.

Λύση

α) $A = (-\infty, 10)$.

β) $f(-1) = 2(-1) - 5 = -7$, $f(3) = 2 \cdot 3 - 5 = 1$ και $f(5) = 5^2 = 25$

γ) Για να διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων, πρέπει $f(0) = 0$. Όμως $f(0) = 2 \cdot 0 - 5 = -5$, οπότε η γραφική παράσταση της f δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ) Έχουμε δυο περιπτώσεις: Για $x \leq 3$ είναι $f(x) = 21 \Leftrightarrow 2x - 5 = 21 \Leftrightarrow 2x = 26 \Leftrightarrow x = 13$ απορρίπτεται και για $x > 3$ είναι $f(x) = 21 \Leftrightarrow x^2 = 21 \Leftrightarrow x = \sqrt{21}$. Κατά συνέπεια το ζητούμενο σημείο είναι $(\sqrt{21}, 21)$.

14752. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{x - 2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A .

β) Να δείξετε ότι το σημείο $M(1, -\sqrt{2})$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$, $y'y$.

Λύση

α) Για να ορίζεται η f πρέπει $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ και

$x^2 - 5x + 6 \geq 0$. Το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$ έχει $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$ και

ρίζες $x_1 = \frac{5+1}{2} = 3$, $x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$.

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$x^2 - 5x + 6$	+	o	-	o	+

Με βάση τον διπλανό πίνακα προσήμων είναι

$x^2 - 5x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$ ή $x \geq 3$. Τελικά $A = (-\infty, 2) \cup [3, +\infty)$.

β) Είναι $f(1) = \frac{\sqrt{1^2 - 5 \cdot 1 + 6}}{1 - 2} = \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$, οπότε το σημείο $M(1, -\sqrt{2})$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

γ) Είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{x - 2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 5x + 6} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ απορρίπτεται ή

$x = 3$ και $f(0) = \frac{\sqrt{6}}{-2} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$. Η γραφική παράσταση της f ει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(3, 0)$ και τον $y'y$,

στο σημείο $\left(0, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

14754. α) Να δείξετε ότι $x^2 + 2x + 4 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left| \frac{x^3 - 8}{x - 2} \right|$.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A.

γ) Να δείξετε ότι $f(x) = x^2 + 2x + 4$ για κάθε $x \in A$.

δ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της g, όπου $g(x) = 6x$.

Λύση

α) Το τριώνυμο $x^2 + 2x + 4$ έχει $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 4 - 16 = -12 < 0$, οπότε $x^2 + 2x + 4 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Για να ορίζεται η f πρέπει $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$, άρα $A = \mathbb{R} - \{2\}$.

γ) Για κάθε $x \in A$ είναι $f(x) = \left| \frac{x^3 - 8}{x - 2} \right| = \left| \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} \right| = |x^2 + 2x + 4| = x^2 + 2x + 4$.

δ) Για κάθε $x \in A$ είναι $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 4 = 6x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow$

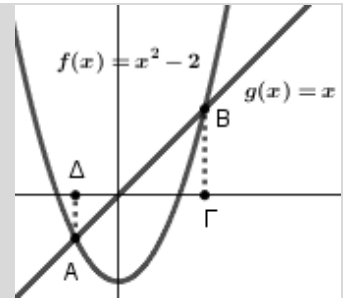
$(x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ απορρίπτεται οπότε οι γραφικές παραστάσεις των f, g, δεν έχουν κοινά σημεία.

14673. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2 - 2$ και $g(x) = x$.

α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων A και B είναι $A(-1, -1)$ και $B(2, 2)$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - x - 2 < 0$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\omega^2 - |\omega| - 2 < 0$.



Λύση

α) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 2 = x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 2$

Είναι $g(-1) = -1$ και $g(2) = 2$ άρα τα ζητούμενα σημεία είναι $A(-1, -1)$ και $B(2, 2)$.

β) 1^{ος} τρόπος: $x^2 - x - 2 < 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) < 0$ στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το πρόσημο του τριωνύμου. Άρα λύσεις της ανίσωσης είναι τα $x \in (-1, 2)$.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x^2 - x - 2$	+	-	+	

2^{ος} τρόπος: $x^2 - x - 2 < 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 < x \Leftrightarrow f(x) < g(x)$ και από τις γραφικές παραστάσεις προκύπτει ότι $x \in (-1, 2)$.

γ) $\omega^2 - |\omega| - 2 < 0 \Leftrightarrow |\omega|^2 - |\omega| - 2 < 0$ θέτοντας $|\omega| = y \geq 0$ είναι $y^2 - y - 2 < 0 \Leftrightarrow -1 < y < 2$

Επειδή $y \geq 0$ είναι $0 \leq y < 2 \Leftrightarrow 0 \leq |\omega| < 2 \Leftrightarrow |\omega| < 2 \Leftrightarrow -2 < \omega < 2$.

37190.α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $A = x^3 - x^2 + 3x - 3$.

β) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{3}{x}$ και $g(x) = x^2 - x + 3$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $A(1, 3)$.

Λύση

α) $A = x^3 - x^2 + 3x - 3 = x^2(x - 1) + 3(x - 1) = (x - 1)(x^2 + 3)$

β) Για να βρούμε τα κοινά σημεία των συναρτήσεων f και g λύνουμε την εξίσωση :

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{3}{x} = x^2 - x + 3 \stackrel{(\cdot x)}{\Leftrightarrow} 3 = x^3 - x^2 + 3x \Leftrightarrow$$

$$x^3 - x^2 + 3x - 3 = 0 \stackrel{(α)}{\Leftrightarrow} (x^2 + 3)(x - 1) = 0 \stackrel{(x^2 + 3 \neq 0)}{\Leftrightarrow} x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Είναι $f(1) = \frac{3}{1} = 3 = g(1)$, άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $A(1, 3)$.

Θέμα 1ο

14782. α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

i. Τα σημεία $A(x, y)$ και $B(-x, y)$ είναι για κάθε τιμή των x, y , συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$.

ii. Η εξίσωση $x^v = a$ με $a < 0$ και v περιττό, έχει ακριβώς μία λύση την $-\sqrt[v]{|a|}$.

iii. Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς a, β ισχύει $|a| + |\beta| = |a + \beta|$

iv. Η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν $\beta^2 - 4a\gamma \geq 0$.

v. Για κάθε γεωμετρική πρόοδο (α_v) με λόγο $\lambda = 1$, το άθροισμα των v πρώτων όρων της δίνεται από τον τύπο $S_v = v \cdot \alpha_1$.

β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, $a \neq 0$ να δείξετε ότι $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{a}$.

Λύση

α) i. Λ ii. Σ iii. Λ iv. Σ v. Σ

$$\beta) P = x_1 \cdot x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-\beta)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{\beta^2 - (\beta^2 - 4a\gamma)}{4a^2} = \frac{4a\gamma}{4a^2} = \frac{\gamma}{a}$$

14813.A1. Στις τέσσερις πρώτες ερωτήσεις να γράψετε στην κόλλα σας το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι σωστή ή το γράμμα Λ αν η πρόταση είναι λάθος, μετά από τον αριθμό της ερώτησης. Στην πέμπτη ερώτηση να γράψετε το γράμμα της σωστής απάντησης μετά από τον αριθμό της ερώτησης.

i) Αν $a \leq 0$ και v άρτιος, τότε ισχύει $\sqrt[v]{a^v} = |a|$.

ii) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$ μπορεί να τέμνει τον άξονα $y'y$ σε ακριβώς δύο σημεία.

iii) Θεωρούμε την αριθμητική πρόοδο (α_v) με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω . Το άθροισμα S_v των v πρώτων διαδοχικών όρων της (α_v) δίνεται από την σχέση $S_v = \frac{v}{2} [\alpha_1 + (v-1)\omega]$.

iv) Η εξίσωση $\alpha \cdot x + \beta = 0$ είναι αδύνατη ως προς x , όταν $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$.

v) Στο διπλανό σχήμα δίνεται μια αντιστοιχία στοιχείων ενός συνόλου A σε στοιχεία ενός συνόλου B. Ποιο από τα παρακάτω είναι σωστό;

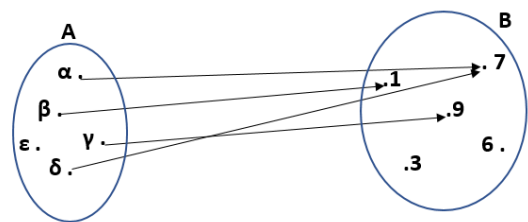
A) η αντιστοιχία αυτή παριστάνει συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B.

B) η αντιστοιχία αυτή δεν παριστάνει συνάρτηση διότι στο 3 και στο 6 δεν αντιστοιχεί κανένα στοιχείο του A.

Γ) η αντιστοιχία αυτή δεν παριστάνει συνάρτηση διότι τα διαφορετικά στοιχεία α και δ του συνόλου A αντιστοιχούν στο ίδιο στοιχείο του συνόλου B, το 7.

Δ) η αντιστοιχία αυτή δεν παριστάνει συνάρτηση διότι το στοιχείο ϵ δεν αντιστοιχεί σε κανένα στοιχείο του B.

A2. Έστω x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι δύο πραγματικές ρίζες του τριωνύμου $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$,



$x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι, αν για την μεταβλητή x ισχύει $x < x_1$ ή $x > x_2$ τότε το τριώνυμο $f(x)$ γίνεται ομόσημο του a .

Λύση

A1. i. Σ ii. Λ iii. Λ iv. Σ v. Δ

A2. Σελ.108 σχολικού βιβλίου απόδειξη.

14935. α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Για οποιουδήποτε μη αρνητικούς αριθμούς a, β ισχύει: $\sqrt{a+\beta} = \sqrt{a} + \sqrt{\beta}$.

ii. Αν $\rho > 0$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $|x| < \rho \Leftrightarrow -\rho < x < \rho$.

iii. Η εξίσωση $x^v = a$, με v περιττό φυσικό και $a < 0$, έχει λύση την $x = \sqrt[v]{a}$.

iv. Για οποιαδήποτε συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(3,5)$ ισχύει $f(5) = 3$.

v. Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί a, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = a\gamma$.

β) Να αποδείξετε ότι ο νιοστός όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι: $\alpha_v = \alpha_1 + (v-1)\omega$.

Λύση

α) i. Λ ii. Σ iii. Λ iv. Λ v. Σ

β) Από τον ορισμό της αριθμητικής προόδου έχουμε:

$$\alpha_1 = \alpha_1$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \omega$$

$$\alpha_3 = \alpha_2 + \omega$$

$$\alpha_4 = \alpha_3 + \omega$$

.....

$$\alpha_{v-1} = \alpha_{v-2} + \omega$$

$$\alpha_v = \alpha_{v-1} + \omega$$

Προσθέτοντας κατά μέλη της v αυτές ισότητες και εφαρμόζοντας την ιδιότητα της διαγραφής βρίσκουμε

$$\alpha_v = \alpha_1 + (v-1)\omega.$$

Η συνάρτηση $y = ax + \beta$

Θέμα 2ο

12630. Δίνεται η ευθεία $y = ax + \beta$, η οποία έχει κλίση -2 και διέρχεται από το σημείο $(1, 1)$.

α) Να βρείτε τις τιμές των a και β .

β) Να βρείτε το σημείο τομής της παραπάνω ευθείας με τον άξονα y' y .

γ) Να χαράξετε σε σύστημα συντεταγμένων την παραπάνω ευθεία.

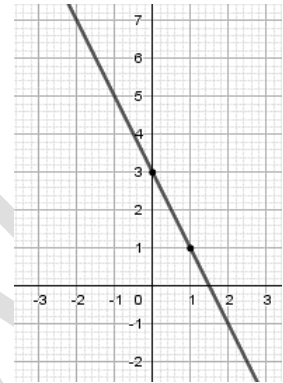
Λύση

α) Η ευθεία έχει κλίση $a = -2$, οπότε η εξίσωσή της είναι της μορφής $y = -2x + \beta$.

Η ευθεία διέρχεται από τη σημείο $(1, 1)$, οπότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας. Δηλαδή: $1 = -2 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow 3 = \beta$, άρα η ευθεία έχει εξίσωση $y = -2x + 3$.

β) Η ευθεία τέμνει τον άξονα y' y στο σημείο $(0, 3)$, αφού για $x = 0$ βρίσκουμε: $y = -2 \cdot 0 + 3 = 3$

γ) Παίρνουμε στο σύστημα συντεταγμένων τα σημεία $(1, 1)$ και $(0, 3)$ και χαράζουμε την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία αυτά.

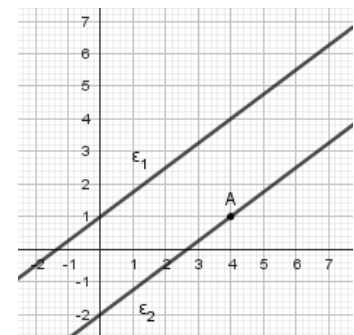


12631. Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων έχουμε χαράξει δυο ευθείες, την (ϵ_1) με εξίσωση $y = \frac{3}{4}x + 1$ και την (ϵ_2) που διέρχεται από το σημείο $A(4, 1)$ και είναι παράλληλη στην (ϵ_1) .

α) Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ϵ_2) .

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ϵ_2) .

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας (ϵ_2) με τους άξονες.



Λύση

α) Η ευθεία (ϵ_1) έχει κλίση $\alpha_1 = \frac{3}{4}$ και η ευθεία (ϵ_2) είναι παράλληλη στην (ϵ_1) , οπότε έχει κλίση

$$\alpha_2 = \alpha_1 = \frac{3}{4}.$$

β) Η ευθεία (ϵ_2) έχει εξίσωση: $y = \frac{3}{4}x + \beta$ και διέρχεται από το σημείο $A(4, 1)$, οπότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας, δηλαδή: $1 = \frac{3}{4} \cdot 4 + \beta \Leftrightarrow 1 = 3 + \beta \Leftrightarrow -2 = \beta$.

Άρα η ευθεία (ϵ_2) έχει εξίσωση: $y = \frac{3}{4}x - 2$.

γ) Η ευθεία τέμνει τον άξονα y' y στο σημείο $(0, -2)$, αφού για $x = 0$ βρίσκουμε $y = \frac{3}{4} \cdot 0 - 2 = -2$.

Για $y = 0$ είναι: $0 = \frac{3}{4}x - 2 \Leftrightarrow 2 = \frac{3}{4}x \Leftrightarrow 3x = 8 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$, οπότε τέμνει τον άξονα x' x στο σημείο $\left(\frac{8}{3}, 0\right)$.

12684. Η ευθεία (ε_1) έχει εξίσωση $y = -\frac{1}{2}x - 2$ και μια ευθεία (ε_2)

διέρχεται από το σημείο $A(-4, 1)$ και είναι παράλληλη στην (ε_1) .

α) Να γράψετε την κλίση της ευθείας (ε_1) και το σημείο τομής της ευθείας αυτής με τον άξονα $y'y$.

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ε_2) με τον άξονα $x'x$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_2) . Ποια είναι τα σημεία τομής της ευθείας αυτής με τους άξονες;

Λύση

α) Η ευθεία (ε_1) έχει κλίση $a_1 = -\frac{1}{2}$.

Για $x = 0$ είναι $y = -\frac{1}{2} \cdot 0 - 2 = -2$, οπότε η (ε_1) τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, -2)$.

β) Η ευθεία (ε_2) είναι παράλληλη στην (ε_1) , οπότε έχει κλίση $a_2 = a_1 = -\frac{1}{2}$. Επομένως η εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ευθεία (ε_2) με τον $x'x$ άξονα ισούται με $-\frac{1}{2}$.

γ) Η ευθεία (ε_2) έχει εξίσωση: $y = -\frac{1}{2}x + \beta$ και διέρχεται από το σημείο $A(-4, 1)$, οπότε

$$1 = -\frac{1}{2} \cdot (-4) + \beta \Leftrightarrow 1 = 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = -1.$$

Άρα η ευθεία (ε_2) έχει εξίσωση: $y = -\frac{1}{2}x - 1$.

Για $x = 0$ είναι $y = -\frac{1}{2} \cdot 0 - 1 = -1$ και για $y = 0$ είναι $0 = -\frac{1}{2}x - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = -1 \Leftrightarrow x = -2$, οπότε η (ε_2) τέμνει τους άξονες στα σημεία $(-2, 0)$ και $(0, -1)$.

12730. Δίνεται η ευθεία $y = ax + \beta$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a και β αν η γραφική παράσταση της f σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° και διέρχεται από το σημείο $A(0, 3)$.

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και κ αν η ευθεία $y = \lambda x + \kappa$ είναι παράλληλη με την ευθεία $y = x + 3$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 2.

Λύση

α) Αφού η ευθεία $y = ax + \beta$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας a θα ισούται με $a = \tan 45^\circ$. Άρα $a = 1$, οπότε η ευθεία παίρνει τη μορφή $y = x + \beta$. Αφού η ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(0, 3)$ θα ισχύει $3 = 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 3$.

Άρα η ευθεία είναι η $y = x + 3$.

β) Αφού οι ευθείες $y = x + 3$ και $y = \lambda x + \kappa$ είναι παράλληλες θα έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης, άρα $\lambda = 1$. Οπότε η ευθεία παίρνει τη μορφή $y = x + \kappa$.

Αφού η ευθεία διέρχεται από το σημείο $B(2, 0)$ θα ισχύει $0 = 2 + \kappa \Leftrightarrow \kappa = -2$.

Άρα η ζητούμενη ευθεία είναι η $y = x - 2$.

12856. Δίνεται ευθεία $\varepsilon: y = ax + 5$. Αν η ευθεία $\delta: y = -3x - 6$ είναι παράλληλη στην (ε) , τότε:

- α) i.** Να βρείτε την κλίση της ευθείας ε .
ii. Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$;
β) Να βρείτε σε ποια σημεία η ευθεία ε τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Λύση

α) i. Επειδή $\varepsilon // \delta$ τότε οι δύο ευθείες θα έχουν την ίδια κλίση. Η κλίση της ευθείας δ είναι -3 . Άρα $a = -3$, δηλαδή η κλίση της ευθείας ε είναι -3 .

ii) Η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον $x'x$ είναι αμβλεία διότι η κλίση της ε είναι $a = -3 < 0$

β) Η ευθεία ε έχει εξίσωση $y = -3x + 5$. Η ευθεία τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τεταγμένη $y = 0$.

Για $y = 0$ έχουμε: $-3x + 5 = 0 \Leftrightarrow -3x = -5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$.

Άρα το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα $x'x$ είναι το $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$.

Η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$ σε σημείο με τεταγμένη $x = 0$. Για $x = 0$ έχουμε: $y = 5$.

Άρα το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα $y'y$ είναι το $(0, 5)$.

12913.α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 + 2x - 3$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της παραπάνω συνάρτησης f .

ii. Να δείξετε ότι $f(x) = x + 3$ για κάθε $x \in A$.

iii. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .

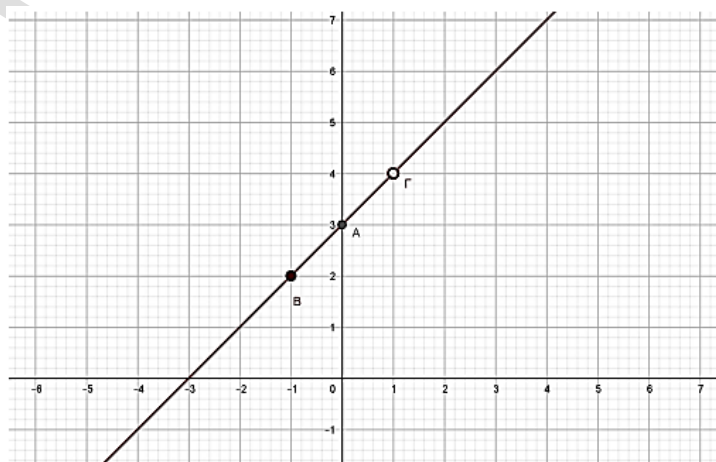
Λύση

α) Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = 16$ και ρίζες $x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$ άρα $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$.

β) i. Για να ορίζεται η f πρέπει $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ άρα έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{1\}$.

ii. Για κάθε $x \neq 1$ είναι $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} \Leftrightarrow f(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} \Leftrightarrow f(x) = x + 3$

iii.



12939. Έστω η ευθεία $\varepsilon_1 : y = ax + \beta$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $A(0, -6)$ και τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(-3, 0)$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a και β .

β) Να βρείτε την ευθεία ε_2 που είναι παράλληλη με την ε_1 και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο ευθειών στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

Λύση

α) Επειδή η ε_2 διέρχεται από το σημείο A ισχύει ότι: $-6 = a \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = -6$

Επειδή η ε_2 διέρχεται από το σημείο B ισχύει ότι:

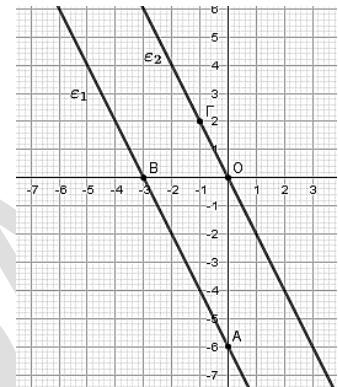
$$0 = a \cdot (-3) - 6 \Leftrightarrow -3a - 6 = 0 \Leftrightarrow -3a = 6 \Leftrightarrow a = -2.$$

$$\text{Άρα } \varepsilon_2 : y = -2x - 6$$

β) Αφού η ευθεία ε_2 διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα είναι της μορφής $y = ax$.

Επειδή οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης οπότε η ευθεία ε_2 έχει τύπο $y = -2x$.

γ) Η ευθεία ε_1 διέρχεται από τα σημεία $A(0, -6)$ και $B(-3, 0)$. Η ευθεία ε_2 διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$ και $\Gamma(-1, 2)$. Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των δύο ευθειών στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



13033. Δίνεται η ευθεία (ε): $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

α) i. Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε).

ii. Είναι οξεία ή αμβλεία η γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον $x'x$ άξονα;

β) Να εξετάσετε ποια από τα σημεία $A(6, 1)$, $B(-2, 3)$ και $\Gamma(8, 0)$ είναι σημεία της ευθείας (ε).

γ) Να βρείτε την τιμή του $k \in \mathbb{R}$ ώστε το σημείο $(k, 5)$ να είναι σημείο της ευθείας (ε).

Λύση

α) i. Η κλίση της ευθείας είναι $\alpha = -\frac{1}{2}$.

ii. Επειδή $\alpha < 0$ ισχύει $\varepsilon\varphi\omega < 90^\circ$, οπότε η γωνία ω είναι αμβλεία.

β) Θα εξετάσουμε αν οι συντεταγμένες των σημείων επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.

Για το σημείο A : $1 = -\frac{1}{2} \cdot 6 + 4 \Leftrightarrow 1 = -3 + 4$ ισχύει, άρα το A είναι σημείο της ευθείας.

Για το σημείο B : $3 = -\frac{1}{2} \cdot (-2) + 4 \Leftrightarrow 3 = 1 + 4$ δεν ισχύει, άρα το B δεν είναι σημείο της ευθείας.

Για το σημείο Γ : $0 = -\frac{1}{2} \cdot 8 + 4 \Leftrightarrow 0 = -4 + 4$ ισχύει, άρα το Γ είναι σημείο της ευθείας.

γ) Το σημείο $(k, 5)$ είναι σημείο της ευθείας, αν και μόνο αν $5 = -\frac{1}{2}k + 4 \Leftrightarrow 10 = -k + 8 \Leftrightarrow k = 8 - 10 = -2$

13054. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = (3\alpha + 4)x - 4$ και $\varepsilon_2 : y = (3 - 4\alpha)x + 4$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Αν $\alpha = 1$, να βρείτε:

i. Τις εξισώσεις των ευθειών.

- ii. Το είδος της γωνίας που σχηματίζει καθεμιά από τις ευθείες με τον άξονα xx' .
 β) Να βρείτε για ποιες τιμές του a οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες.

Λύση

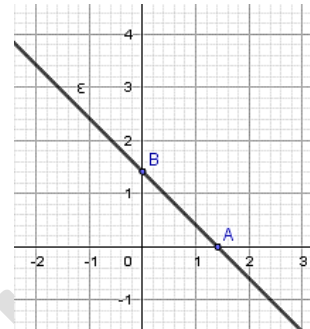
α) i. Για $a=1$ είναι $\varepsilon_1: y = (3 \cdot 1 + 4)x - 4 = 7x - 4$ και $\varepsilon_2: y = (3 - 4 \cdot 1)x + 4 = -x + 4$.

ii. Η ευθεία ε_1 έχει συντελεστή διεύθυνσης $a = 7 > 0$, οπότε σχηματίζει με τον άξονα xx' οξεία γωνία, ενώ η ε_2 έχει συντελεστή διεύθυνσης $a = -1 < 0$, οπότε σχηματίζει με τον άξονα xx' αμβλεία γωνία.

β) Οι ευθείες είναι παράλληλες μόνο όταν έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης, δηλαδή μόνο όταν ισχύει

$$3a + 4 = 3 - 4a \Leftrightarrow 3a + 4a = 3 - 4 \Leftrightarrow 7a = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{7}$$

Άρα η ευθείες είναι παράλληλες μόνο όταν $a = -\frac{1}{7}$.



13178. Δίνεται το σημείο $M(3, 4)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το M και από το $O(0, 0)$.

β) Δίνεται το σημείο $N(-3, \lambda)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$ το οποίο ανήκει στην ευθεία OM .

i. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii. Αν $N(-3, -4)$ να εξετάσετε αν τα σημεία M, N , είναι συμμετρικά ως προς το O .

Λύση

α) Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και δεν είναι ο άξονας $y'y$ είναι της μορφής $y = ax$. Για να διέρχεται από το M πρέπει $4 = 3a \Leftrightarrow a = \frac{4}{3}$, οπότε είναι η $y = \frac{4}{3}x$.

β) i. Επειδή το N ανήκει στην ευθεία οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας, δηλαδή $\lambda = \frac{4}{3}(-3) \Leftrightarrow \lambda = -4$.

ii. Επειδή τα σημεία M και N έχουν αντίθετες συντεταγμένες, είναι συμμετρικά ως προς την αρχή O των αξόνων.

13318. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = -x + \sqrt{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0), f(\sqrt{2}), f(-\sqrt{2}), [f(-\sqrt{2})]^2$.

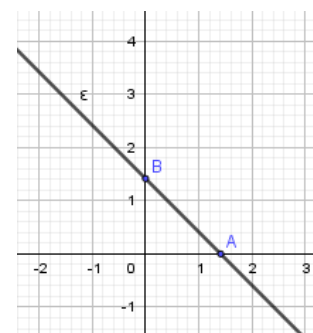
β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Λύση

α) $f(0) = 0 + \sqrt{2} = \sqrt{2}$, $f(\sqrt{2}) = -\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$

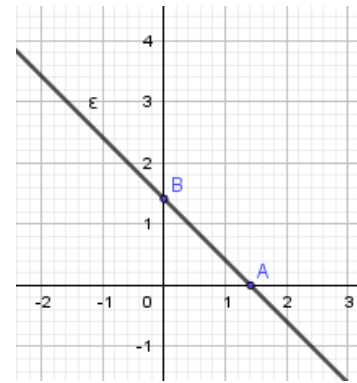
$f(-\sqrt{2}) = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$, $[f(-\sqrt{2})]^2 = (2\sqrt{2})^2 = 4 \cdot 2 = 8$

β) $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow -x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$



Η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(\sqrt{2}, 0)$. Επειδή $f(0) = \sqrt{2}$ η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, \sqrt{2})$.

Η γραφική παράσταση της f είναι μια ευθεία που για να την κατασκευάσουμε θα ενώσουμε τα σημεία A και B .



13400. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = -x + 2$.

α) Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες.

γ) Να σχεδιάσετε την ευθεία ε .

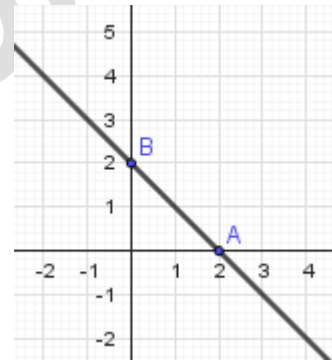
Λύση

α) Η ευθεία ε έχει συντελεστή διεύθυνσης $\alpha = -1 < 0$. Άρα σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ αμβλεία γωνία.

β) Για να βρούμε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$ θέτουμε στην εξίσωσή της όπου $y = 0$. Δηλαδή $-x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Άρα το σημείο τομής είναι $A(2, 0)$.

Για να βρούμε το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $y'y$, θέτουμε στην εξίσωσή της όπου $x = 0$ και βρίσκουμε $y = 2$. Άρα το σημείο τομής είναι $B(0, 2)$.

γ) Σημειώνουμε πάνω στους άξονες τα σημεία A και B που βρήκαμε στο ερώτημα **β)**, τα ενώνουμε και σχεδιάζουμε την ευθεία όπως στο διπλανό σχήμα.



13471. Θεωρούμε τα σημεία $A(2, 1), B(-1, -5), \Gamma(27, 50)$ και την ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x - 3$. Αν το σημείο A είναι πάνω στην ευθεία, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$.

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο B είναι πάνω στην ευθεία.

Κατόπιν να εξετάσετε αν και το σημείο Γ είναι πάνω στην ίδια ευθεία.

Λύση

α) Επειδή το σημείο A βρίσκεται πάνω στην ευθεία ε , ισχύει ότι $1 = 2\lambda - 3 \Leftrightarrow 2\lambda = 4 \Leftrightarrow \lambda = 2$

β) Το B βρίσκεται πάνω στην ευθεία, αν και μόνο αν $-5 = 2(-1) - 3 \Leftrightarrow -5 = -2 - 3$ ισχύει.

γ) Το σημείο Γ βρίσκεται πάνω στην ευθεία, αν και μόνο αν:

$50 = 2 \cdot 27 - 3 \Leftrightarrow 50 = 54 - 3$ αδύνατο. Άρα το Γ δεν βρίσκεται πάνω στην ευθεία.

14575. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x$, για κάθε $x \in A$.

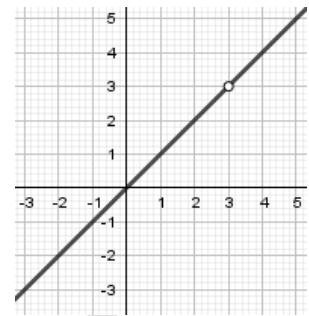
γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$, άρα $A_f = \mathbb{R} - \{3\}$.

β) Είναι $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 3} = \frac{x(x-3)}{x-3} = x, x \neq 3$

γ) Η συνάρτηση f έχει γραφική παράσταση ευθεία η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι διχοτόμος της 1ης και 3ης γωνίας. Από την ευθεία θα εξαιρεθεί το σημείο $(3,3)$, διότι $3 \notin A_f$. Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



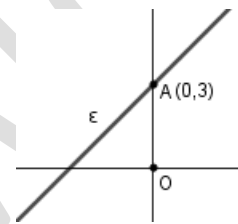
14641. Η διπλανή ευθεία ε σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .

α) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ε .

β) Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας ε .

γ) Να βρείτε το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$.

(Δίνεται ότι $\varepsilon\varphi 45^\circ = 1$)

**Λύση**

α) Είναι $\alpha = \varepsilon\varphi 45^\circ = 1$.

β) Η ε έχει συντελεστή διεύθυνσης 1 και τέμνει τον $y'y$ στο $A(0,3)$, οπότε έχει εξίσωση: $y = x + 3$.

γ) Για $x = 0$ είναι $y = 3$ και για $y = 0$ είναι $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$

άρα η ε τέμνει τους άξονες στα σημεία $(0,3)$ και $(-3,0)$.

21239. Η ευθεία $y = ax + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, -2)$ και διέρχεται από το σημείο $B(-2, -4)$.

α) Να βρείτε τους αριθμούς α, β .

β) Για $\alpha = 1$ και $\beta = -2$, να βρείτε για ποιες τιμές του x η ευθεία βρίσκεται κάτω από τον $x'x$ άξονα.

Λύση

α) Επειδή η ευθεία διέρχεται από το σημείο A , ισχύει ότι: $-2 = \alpha \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = -2$.

Επειδή η ευθεία διέρχεται από το σημείο B , ισχύει ότι:

$$-4 = \alpha \cdot (-2) - 2 \Leftrightarrow -4 = -2\alpha - 2 \Leftrightarrow 2\alpha = 4 - 2 \Leftrightarrow 2\alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

άρα η ευθεία είναι η $y = x - 2$.

β) Η ευθεία βρίσκεται κάτω από τον $x'x$ όταν $y < 0 \Leftrightarrow x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$

35201. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 6)$, $B(-1, 4)$, να βρείτε τις τιμές των α, β .

β) Αν $\alpha = 1$ και $\beta = 5$, να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Λύση

α) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1, 6)$ αν και μόνο αν:

$$f(1) = 6 \Leftrightarrow \alpha \cdot 1 + \beta = 6 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 6 \Leftrightarrow \beta = 6 - \alpha \quad (1)$$

Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $B(-1, 4)$ αν και μόνο αν:

$$f(-1) = 4 \Leftrightarrow \alpha \cdot (-1) + \beta = 4 \Leftrightarrow -\alpha + \beta = 4 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} -\alpha + 6 - \alpha = 4 \Leftrightarrow -2\alpha = -2 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

Αντικαθιστούμε την τιμή $\alpha = 1$ στη σχέση (1) και βρίσκουμε: $\beta = 6 - 1 \Leftrightarrow \beta = 5$

Για $\alpha = 1$ και $\beta = 5$, ο τύπος της f γράφεται $f(x) = x + 5$.

β) Για τις τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5 \text{ Άρα η } C_f \text{ τέμνει τον άξονα } x'x \text{ στο σημείο } A(-5, 0).$$

Επίσης έχουμε: $f(0) = 0 + 5 = 5$ Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, 5)$.

37183. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f(0) = 5$ και $f(1) = 3$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha = -2$ και $\beta = 5$.

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

Λύση

$$\alpha) f(1) = 3 \Leftrightarrow \alpha \cdot 1 + \beta \stackrel{\beta=5}{=} 3 \Leftrightarrow \alpha + 5 = 3 \Leftrightarrow \alpha = -2, f(0) = 5 \Leftrightarrow \alpha \cdot 0 + \beta = 5 \Leftrightarrow \beta = 5$$

$$\beta) \text{ Είναι } f(x) = -2x + 5.$$

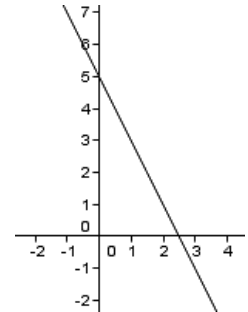
Για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ λύνουμε την

$$\text{εξίσωση: } f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 5 = 0 \Leftrightarrow -2x = -5 \Leftrightarrow x = \frac{-5}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

Άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ είναι το σημείο $A\left(\frac{5}{2}, 0\right)$. Το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα

$y'y$ είναι το σημείο $(0, f(0))$. Επειδή $f(0) = 5$ το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $y'y$ είναι το σημείο $\Gamma(0, 5)$

γ) Για τη κατασκευή της γραφικής παράστασης της f , αρκεί να χαράξουμε την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και Γ .

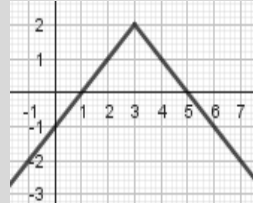
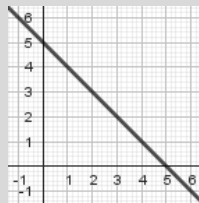
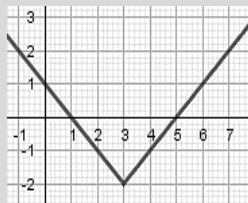
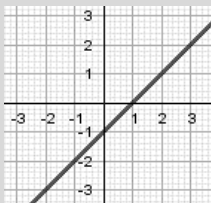


Θέμα 4ο

12681. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x-3| + 4 - (|6-2x| + 2)$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2 - |x-3|$.

β) Αφού δείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{αν } x < 3 \\ 5-x, & \text{αν } x \geq 3 \end{cases}$, να επιλέξετε το σωστό και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. Η γραφική παράσταση της f είναι:



γ) i. Στο σχήμα με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f να σχεδιάσετε την ευθεία $y = -1$ και με τη βοήθειά της να λύσετε την ανίσωση $2 - |x-3| > -1$.

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα.

Λύση

$$\begin{aligned} \alpha) f(x) &= |x-3| + 4 - (|6-2x| + 2) = |x-3| + 4 - |-2(x-3)| - 2 = 2 + |x-3| - |-2||x-3| = \\ &= 2 + |x-3| - 2|x-3| = 2 - |x-3| \end{aligned}$$

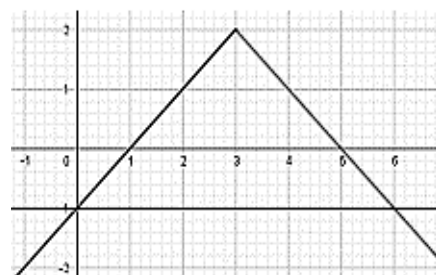
β) Αν $x < 3$ τότε $f(x) = 2 - (-x+3) = 2+x-3 = x-1$ και αν $x \geq 3$ τότε

$$f(x) = 2 - (x-3) = 2-x+3 = 5-x, \text{ οπότε } f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{αν } x < 3 \\ 5-x, & \text{αν } x \geq 3 \end{cases}.$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η γραφική παράσταση της f είναι η (4).

γ) i. Αν σχεδιάσουμε την ευθεία $y = -1$ προκύπτει το διπλανό γράφημα.

Η λύση της ανίσωσης είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από την ευθεία $y = -1$. Από το σχήμα προκύπτει ότι $0 < x < 6$.



ii) Είναι: $f(x) > y \Leftrightarrow 2 - |x-3| > -1 \Leftrightarrow -|x-3| > -3 \Leftrightarrow$

$$|x-3| < 3 \Leftrightarrow -3 < x-3 < 3 \Leftrightarrow 0 < x < 6$$

12682. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 - (x-1)^2$ και $g(x) = |x-1| + 2$, με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση C_f της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

β) Να αποδείξετε ότι $g(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 1 \\ -x+3, & x < 1 \end{cases}$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση C_g .

γ) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g .

Λύση

α) Η C_f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$ για τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) < 0$. Είναι

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - (x-1)^2 < 0 \Leftrightarrow -(x-1)^2 < -1 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2 > 1 \Leftrightarrow |x-1| > 1 \Leftrightarrow (x-1 < -1 \Leftrightarrow x < 0) \text{ ή } (x-1 > 1 \Leftrightarrow x > 2)$$

β) Αν $x \geq 1$ τότε $g(x) = x - 1 + 2 = x + 1$ και αν $x < 1$ τότε $g(x) = -x + 1 + 2 = -x + 3$, οπότε

$$g(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 1 \\ -x+3, & x < 1 \end{cases}$$

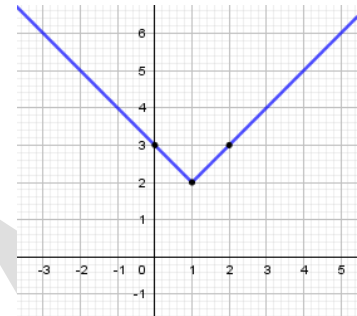
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g αποτελείται :

Από το τμήμα της ευθείας $y = x + 1$ με $x \geq 1$ που έχει πίνακα τιμών:

x	1	2
y	2	3

και από το τμήμα της ευθείας $y = -x + 3$, $x < 1$ που έχει πίνακα τιμών:

x	1	0
y	2	3



Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της g .

γ) 1^{ος} τρόπος: Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) < g(x)$.

Είναι $f(x) < g(x) \Leftrightarrow 1 - (x-1)^2 < |x-1| + 2 \Leftrightarrow 0 < (x-1)^2 + |x-1| + 3$ που ισχύει αφού $(x-1)^2 \geq 0$ και $|x-1| \geq 0$.

2^{ος} τρόπος: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow -(x-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 - (x-1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow f(x) \leq 1$ και $|x-1| \geq 0 \Leftrightarrow |x-1| + 2 \geq 2 \Leftrightarrow g(x) \geq 2$, οπότε $f(x) < g(x)$.

12689. Ένα ελικόπτερο απογειώνεται από το ελικοδρόμιο και το ύψος του $Y_1(t)$, σε μέτρα, από την επιφάνεια της θάλασσας τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση: $Y_1(t) = 150 + 50t$, $t \in [0, 5]$.

Τα επόμενα πέντε λεπτά κινείται σε σταθερό ύψος και στη συνέχεια κατεβαίνει αργά για δέκα λεπτά ακόμα, μέχρι να επιστρέψει στο ελικοδρόμιο. Το ύψος του από την επιφάνεια της θάλασσας τα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση:

$$Y_2(t) = 650 - 25t.$$

α) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας βρίσκεται το ελικοδρόμιο;

β) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας πετάει το ελικόπτερο από το 5^ο μέχρι το 10^ο λεπτό της κίνησής του;

γ) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $Y_2(t)$, και να προσδιορίσετε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες η απόσταση του ελικοπτερου από τη θάλασσα είναι 250 μέτρα.

δ) i. Στα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του, πόσα μέτρα ανεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει;

ii. Στα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του πόσα μέτρα κατεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει;

Λύση

α) Την χρονική στιγμή $t = 0$ το ελικόπτερο βρίσκεται στο ελικοδρόμιο το οποίο είναι $Y_1(0) = 150$ μέτρα πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας.

β) Μετά από 5 λεπτά, το ελικόπτερο θα βρίσκεται σε ύψος

$Y_1(5) = 150 + 50 \cdot 5 = 400$ μέτρα πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας. Άρα θα πετάει σταθερά στο ύψος αυτό για χρόνο $t \in [5, 10]$.

γ) Το ελικόπτερο κατεβαίνει από το 10ο λεπτό μέχρι να φτάσει πάλι στο ελικοδρόμιο. Θα φτάσει στο ελικοδρόμιο μετά από 10 λεπτά, επομένως το πεδίο ορισμού της $Y_2(t)$ είναι το διάστημα $[10, 20]$. Σε ύψος 250 μέτρων από την επιφάνεια της θάλασσας θα βρίσκεται και όταν ανεβαίνει και όταν επιστρέφει στο ελικοδρόμιο. Δηλαδή θα βρούμε τη χρονική στιγμή κατά την οποία:

$$Y_1(t) = 250 \Leftrightarrow 150 + 50t = 250 \Leftrightarrow 50t = 100 \Leftrightarrow t = 2 \text{ λεπτά}$$

$$Y_2(t) = 250 \Leftrightarrow 650 - 25t = 250 \Leftrightarrow -25t = -400 \Leftrightarrow t = 16 \text{ λεπτά}$$

δ) i. Όταν ανεβαίνει το ελικόπτερο, παρατηρούμε ότι κάθε λεπτό που περνάει (μέχρι το 5ο λεπτό της κίνησής του) το ύψος του από την επιφάνεια της θάλασσας αυξάνει σταθερά κατά 50 μέτρα, αφού:

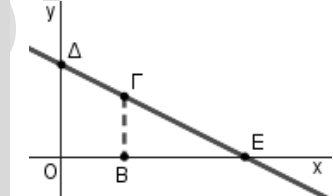
$$Y_1(t+1) - Y_1(t) = [150 + 50(t+1)] - (150 + 50t) = 50 \text{ μέτρα.}$$

ii. Όταν επιστρέφει το ελικόπτερο στη βάση του, παρατηρούμε ότι κάθε λεπτό που περνάει (από το 10ο μέχρι το 20ο λεπτό της κίνησής του) το ύψος του από την επιφάνεια της θάλασσας μειώνεται σταθερά κατά 25 μέτρα, αφού:

$$Y_2(t+1) - Y_2(t) = [650 - 25(t+1)] - (650 - 25t) = -25 \text{ μέτρα.}$$

12728. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων, Δ είναι ένα σημείο στον $y'y$ άξονα, Ε ένα σημείο του $x'x$ άξονα και Ο είναι η αρχή των αξόνων.

Η εξίσωση της ευθείας ΔΕ είναι: $y + \frac{1}{2}x = 4$.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Ε και Δ.

Ένα σημείο $\Gamma(t, y_\Gamma)$ κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ και Β ένα σημείο του $x'x$ άξονα, τέτοιο ώστε ΒΓ να είναι παράλληλη στον $y'y$ άξονα.

β) Να προσδιορίσετε το διάστημα στο οποίο παίρνει τιμές η τετμημένη t του σημείου Γ και να δείξετε ότι $y_\Gamma = 4 - \frac{1}{2}t$.

γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $E(t) = 4t - \frac{1}{2}t^2$ εκφράζει το εμβαδόν του τραπεζίου ΟΒΓΔ και να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής στο πλαίσιο του προβλήματος.

δ) Αν το εμβαδόν του τραπεζίου ισούται με 9, 75 τετραγωνικές μονάδες, να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Γ .

Λύση

α) Η ευθεία $y + \frac{1}{2}x = 4$ τέμνει τον $y'y$ άξονα στο σημείο $\Delta(0, 4)$ και τον $x'x$ άξονα στο σημείο $E(8, 0)$,

αφού για $x = 0$, έχουμε: $y + \frac{1}{2} \cdot 0 = 4 \Leftrightarrow y = 4$ και για $y = 0$, έχουμε: $0 + \frac{1}{2}x = 4 \Leftrightarrow x = 8$

β) Το Γ είναι σημείο του ΔΕ ευθύγραμμου τμήματος, άρα έχει τετμημένη που παίρνει τιμές μεταξύ των τιμών που έχουν οι τετμημένες των σημείων

$\Delta(0, 4)$ και $E(8, 0)$. Δηλαδή: $0 \leq t \leq 8$. Οι συντεταγμένες του σημείου Γ ικανοποιούν την εξίσωση

$$y + \frac{1}{2}x = 4, \text{ οπότε:}$$

$$y_\Gamma + \frac{1}{2}t = 4 \Leftrightarrow y_\Gamma = 4 - \frac{1}{2}t.$$

γ) Το εμβαδόν του τραπεζίου είναι: $E = \frac{(OA + BG)OB}{2}$, όπου $OA = y_A = 4$, $BG = 4 - \frac{1}{2}t$ και $OB = x_\Gamma = t$,

$$\text{οπότε } E(t) = \frac{\left(4 + 4 - \frac{1}{2}t\right)t}{2} = \frac{1}{2}\left(8t - \frac{1}{2}t^2\right) = \frac{1}{2}8t - \frac{1}{4}t^2 = 4t - \frac{1}{4}t^2 \text{ με } 0 \leq t \leq 8.$$

$$\delta) E(t) = 9,75 \Leftrightarrow 4t - \frac{1}{4}t^2 = 9,75 \Leftrightarrow 16t - t^2 = 39 \Leftrightarrow 0 = t^2 - 16t + 39 \Leftrightarrow t = 3 \text{ ή } t = 13.$$

Επειδή όμως $0 \leq t \leq 8$, είναι $t = 3$, οπότε $x_\Gamma = 3$ και $y_\Gamma = 4 - \frac{1}{2} \cdot 3 = 4 - 1,5 = 2,5$. Άρα $\Gamma(3, 2,5)$.

12788. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)^2$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \beta$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(\sqrt{3}) + f(-\sqrt{3}) = 8$.

β) Να βρείτε όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της f , με συντεταγμένες ακέραιους αριθμούς, τα οποία βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 4$.

γ) Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί με ώστε να ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$. Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 2$.

Λύση

$$\alpha) f(\sqrt{3}) + f(-\sqrt{3}) = (\sqrt{3}-1)^2 + (-\sqrt{3}-1)^2 = (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} \cdot 1 + 1 + (-\sqrt{3})^2 + 2(-\sqrt{3})(-1) + (-1)^2 = 3 - 2\sqrt{3} + 1 + 3 + 2\sqrt{3} + 1 = 8$$

β) Ένα σημείο $M(x, f(x))$ της γραφικής παράστασης της f , βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 4$ μόνο όταν ισχύει $f(x) < 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 < 4 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} < \sqrt{4} \Leftrightarrow |x-1| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-1 < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 3$.

Οι ακέραιοι που βρίσκονται στο διάστημα $(-1, 3)$ είναι οι: 0, 1, 2.

Είναι $f(0) = (0-1)^2 = 1$, $f(1) = (1-1)^2 = 0$, $f(2) = (2-1)^2 = 1$, οπότε τα ζητούμενα σημεία είναι τα $(0, 1)$, $(1, 0)$ και $(2, 1)$.

$$\gamma) f(\alpha) = f(\beta) \Leftrightarrow (\alpha-1)^2 = (\beta-1)^2 \Leftrightarrow |\alpha-1| = |\beta-1| \Leftrightarrow \alpha-1 = \pm(\beta-1) \Leftrightarrow (\alpha-1 = \beta-1 \Leftrightarrow \alpha = \beta \text{ άτοπο αφού } \alpha \neq \beta) \text{ ή } (\alpha-1 = -\beta+1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 2)$$

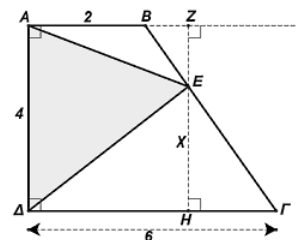
12834. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ώστε $AB=2$, $A\Delta=4$, $\Gamma\Delta=6$, ενώ η $A\Delta$ είναι κάθετη στην AB και επίσης κάθετη στην $\Gamma\Delta$. Το σημείο E μπορεί να πάρει οποιαδήποτε θέση επί του ευθύγραμμου τμήματος $B\Gamma$ και ονομάζουμε x την απόσταση του E από την $\Gamma\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου $A\Delta E$ δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = -2x + 12$.

Ποιο είναι το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης;

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$.

$$\gamma) \text{ Να υπολογίσετε το άθροισμα } \Sigma = f\left(\frac{1}{16}\right) + f\left(\frac{2}{16}\right) + f\left(\frac{3}{16}\right) + f\left(\frac{4}{16}\right) + \dots + f\left(\frac{64}{16}\right).$$

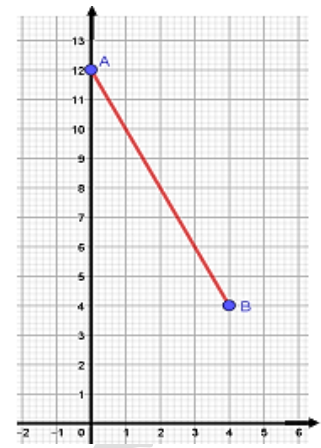


Λύση

$$\alpha) \text{ Είναι } f(x) = (AB\Gamma\Delta) - (ABE) - (E\Delta\Gamma) = \frac{(2+6) \cdot 4}{2} - \frac{2 \cdot (4-x)}{2} - \frac{6x}{2} = 16 - 4 + x - 3x = 12 - 2x$$

Για την μεταβλητή x , πρέπει $x \in [0, 4]$, αφού απαιτούμε τα μήκη EH και EZ να είναι μη αρνητικοί αριθμοί, άρα πρέπει $x \geq 0$ και $4 - x \geq 0$, άρα $x \leq 4$.

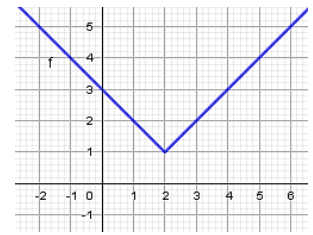
β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -2x + 12$ με $x \in \mathbb{R}$, γνωρίζουμε ότι είναι μια ευθεία, οπότε εδώ, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα του διπλανού σχήματος, με άκρα τα σημεία $A(0, 12)$ και $B(4, 4)$, αφού $f(0) = -2 \cdot 0 + 12 = 12$ και $f(4) = -2 \cdot 4 + 12 = 4$



$$\begin{aligned} \gamma) \Sigma &= f\left(\frac{1}{16}\right) + f\left(\frac{2}{16}\right) + f\left(\frac{3}{16}\right) + f\left(\frac{4}{16}\right) + \dots + f\left(\frac{64}{16}\right) = \\ &= \left(-2 \cdot \frac{1}{16} + 12\right) + \left(-2 \cdot \frac{2}{16} + 12\right) + \dots + \left(-2 \cdot \frac{64}{16} + 12\right) = \\ &= -\frac{2}{16} \cdot 1 + 12 - \frac{2}{16} \cdot 2 + 12 - \dots - \frac{2}{16} \cdot 64 + 12 = -\frac{2}{16}(1 + 2 + \dots + 64) + 12 \cdot 64 = \\ &= -\frac{1}{8} \cdot \frac{64(64+1)}{2} + 12 \cdot 64 = -4 \cdot 65 + 768 = -260 + 768 = 508 \end{aligned}$$

Το άθροισμα $1 + 2 + \dots + 64$ είναι άθροισμα 64 όρων της αριθμητικής προόδου που έχει $a_1 = 1$ και $\omega = 1$, οπότε $1 + 2 + \dots + 64 = \frac{64(64+1)}{2} = 2080$.

12914. Έστω η ευθεία $\varepsilon: y = c$, με παράμετρο $c \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f(x) = |x - 2| + 1$, η γραφική παράσταση της οποίας δίνεται στο διπλανό σχήμα.



α) i. Με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του $c \in \mathbb{R}$ η ευθεία ε και η γραφική παράσταση της f έχουν κοινά σημεία;

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος α) i).

β) Έστω ότι η ευθεία ε έχει με τη γραφική παράσταση της f δυο κοινά σημεία A, B . Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των κοινών σημείων είναι $A(3 - c, c)$ και $B(c + 1, c)$.

γ) i. Αν A, B τα σημεία του ερωτήματος β), με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του c το μήκος του τμήματος AB είναι $(AB) \leq 2$;

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος γ) i).

Λύση

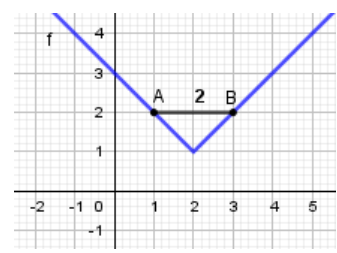
α) i. Επειδή η ευθεία ε είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, από το σχήμα προκύπτει ότι έχει κοινά σημεία με την C_f όταν $c \geq 1$.

ii. $f(x) = c \Leftrightarrow |x - 2| + 1 = c \Leftrightarrow |x - 2| = c - 1$. Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $|x - 2| \geq 0$, η εξίσωση έχει λύση μόνο όταν και $c - 1 \geq 0 \Leftrightarrow c \geq 1$.

β) Για $c \geq 1$ είναι $|x - 2| = c - 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x - 2 = c - 1 \Leftrightarrow x = c + 1)$ ή $(x - 2 = -c + 1 \Leftrightarrow x = 3 - c)$

Άρα τα κοινά σημεία είναι τα $A(3 - c, c)$ και $B(c + 1, c)$

γ) i. Επειδή τα σημεία A και B έχουν την ίδια τεταγμένη, για να είναι $(AB) \leq 2$ πρέπει το μήκος του οριζόντιου τμήματος ανάμεσα στις δύο



ημιευθείες της γραφικής παράστασης της f να είναι μικρότερο ή ίσο του 2. Από το σχήμα προκύπτει ότι αυτό ισχύει για τα σημεία με τεταγμένη από 1 έως και 2. Άρα $1 \leq c \leq 2$.

ii. Επειδή τα σημεία A και B έχουν την ίδια τεταγμένη, το μήκος (AB)

$$\text{είναι } (AB) = |c + 1 - (3 - c)| = |c + 1 - 3 + c| = |2c - 2|$$

Είναι $(AB) \leq 2 \Leftrightarrow |2c - 2| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq 2c - 2 \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq 2c \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq c \leq 2$. όμως από το α σκέλος είναι $c \geq 1$, άρα $1 \leq c \leq 2$.

12921. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2|k|x - 2$ και η ευθεία $\varepsilon: y = 2x - k^2, k \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες

για κάθε $k \in \mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία για κάθε τιμή της παραμέτρου k .

γ) Για $k = -3$ να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας με την γραφική παράσταση της f .

δ) Αν A και B τα σημεία τομής του ερωτήματος γ), να βρείτε την απόσταση (AB).

Λύση

α) Η εξίσωση είναι 2^{ου} βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = (-2|k|)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 4k^2 + 8$.

Επειδή για κάθε $k \in \mathbb{R}$ είναι $\Delta > 0$, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $k \in \mathbb{R}$.

β) Τα σημεία τομής έχουν τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = y \Leftrightarrow$

$$x^2 - 2|k|x - 2 = 2x - k^2 \Leftrightarrow x^2 - 2|k|x - 2 - 2x + k^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(|k| + 1)x + k^2 - 2 = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Η τελευταία είναι 2^{ου} βαθμού με διακρίνουσα } \Delta &= 4(|k| + 1)^2 - 4(k^2 - 2) = 4(k^2 + 2|k| + 1) - 4(k^2 - 2) = \\ &= 4(k^2 + 2|k| + 1 - k^2 + 2) = 4(2|k| + 3) \end{aligned}$$

Επειδή για κάθε $k \in \mathbb{R}$ είναι $\Delta > 0$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες και επομένως η ευθεία (ε) τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία για κάθε τιμή της παραμέτρου k .

γ) Για $k = -3$, η (1) γίνεται $x^2 - 8x + 7 = 0$, έχει διακρίνουσα $\Delta = 4(2|-3| + 3) = 36$ και ρίζες

$$x_1 = \frac{8 + \sqrt{36}}{2} = 7, x_2 = \frac{8 - \sqrt{36}}{2} = 1$$

Για $x = 1$ είναι $y = 2 \cdot 1 - (-3)^2 = 2 - 9 = -7$ άρα σημείο τομής το $A(1, -7)$ και

για $x = 7$ είναι $y = 2 \cdot 7 - (-3)^2 = 14 - 9 = 5$ άρα σημείο τομής το $B(7, 5)$.

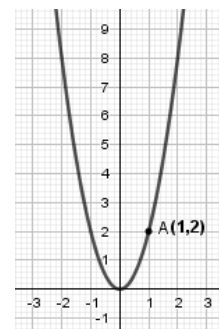
$$\delta) \text{ Είναι } (AB) = \sqrt{(7-1)^2 + (5-(-7))^2} = \sqrt{36 + 144} = \sqrt{180} = \sqrt{36 \cdot 5} = 6\sqrt{5}$$

12942. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = ax^2, x \in \mathbb{R}$ με παράμετρο a .

α) Αν το σημείο $A(1, 2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f , να δείξετε ότι τιμή της παραμέτρου είναι $a = 2$.

β) i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $(1, 6)$ και έχει κλίση $\lambda = 2$.

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες και στη συνέχεια να τη σχεδιάσετε.



γ) i. Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) < 2x + 4$.

ii. Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση του προηγούμενου ερωτήματος.

Λύση

α) Επειδή το σημείο Α ανήκει στη γραφική παράσταση της f ισχύει ότι $f(1) = 2 \Leftrightarrow a \cdot 1^2 = 2 \Leftrightarrow a = 2$.

β) i. Η εξίσωση της ευθείας που έχει κλίση 2 είναι της μορφής $y = 2x + \beta$.

Επειδή διέρχεται από το σημείο (1, 6) ισχύει ότι $6 = 2 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = 4$, οπότε η ευθεία είναι η $y = 2x + 4$.

ii. Για $y = 0$ είναι $2x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2$ και για $x = 0$ είναι $y = 2 \cdot 0 + 4 = 4$, οπότε η ευθεία τέμνει τους άξονες στα σημεία (-2, 0) και (0, 4). Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

γ) i. Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) < 2x + 4$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 4$, οπότε με βάση το παραπάνω σχήμα συμπεραίνουμε ότι $x \in (-1, 2)$.

ii. $f(x) < 2x + 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 4 < 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 < 0$

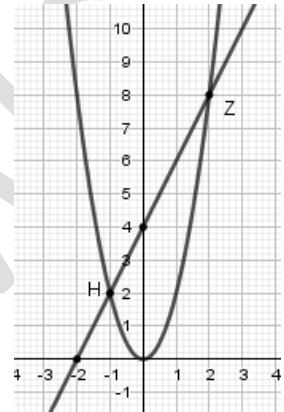
Το τριώνυμο $x^2 - x - 2$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 \text{ και ρίζες } x_1 = \frac{1 + \sqrt{9}}{2} = 2, x_2 = \frac{1 - \sqrt{9}}{2} = -1 \text{ και επειδή ο}$$

συντελεστής του x^2 είναι $1 > 0$,

το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον διπλανό πίνακα.

Άρα $x^2 - x - 2 < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 2)$.



x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x^2 - x - 2$	+	-	+	+

12944. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x + \frac{1}{x}$ και $g(x) = x - \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = f(2) + g(2) - f\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{1}{2}\right)$.

β) Να αποδείξετε ότι $(f(x))^2 - (g(x))^2 = 4$ για οποιοδήποτε αριθμό $x \neq 0$.

γ) Θεωρούμε την ευθεία $y = a$, $a \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , να αποδείξετε ότι $|a| \geq 2$.

Λύση

$$\alpha) A = f(2) + g(2) - f\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$= 2 + \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{1}{2}}\right) = 4 - \left(\frac{1}{2} + 2\right) - \left(\frac{1}{2} - 2\right) = 4 - \frac{1}{2} - \cancel{2} - \frac{1}{2} + \cancel{2} = 3$$

$$\beta) \text{ Για κάθε } x \neq 0 \text{ είναι } (f(x))^2 - (g(x))^2 =$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \left(x^2 - 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} - x^2 + 2 - \frac{1}{x^2} = 4$$

γ) Το πλήθος των κοινών σημείων της ευθείας με τη γραφική παράσταση της f καθορίζεται από το πλήθος

λύσεων της εξίσωσης $f(x) = a$, οπότε αν η ευθεία έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f , η εξίσωση $f(x) = a$ έχει πραγματικές λύσεις.

$$\text{Είναι: } f(x) = a \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = a \Leftrightarrow x^2 + 1 = ax \Leftrightarrow x^2 - ax + 1 = 0.$$

Η εξίσωση είναι 2^{ου} βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = a^2 - 4$.

Επειδή η εξίσωση έχει τουλάχιστον μία λύση, είναι $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 \geq 4 \Leftrightarrow \sqrt{a^2} \geq \sqrt{4} \Leftrightarrow |a| \geq 2$.

13055. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $x \in \mathbb{R}$ και η ευθεία $y = 2x + \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει $f(2+x) = f(2-x)$.

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = f(3,52) - f(0,52) + f(3,48) - f(0,48)$.

γ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση C_f της f έχει κοινά σημεία με την ευθεία, όταν $\beta = -5$.

δ) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του β , ώστε η C_f να έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία.

Λύση

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι: $f(2+x) = (2+x)^2 - 4(2+x) + 5 = 4 + 4x + x^2 - 8 - 4x + 5 = x^2 + 1$ και $f(2-x) = (2-x)^2 - 4(2-x) + 5 = 4 - 4x + x^2 - 8 + 4x + 5 = x^2 + 1$, οπότε $f(2+x) = f(2-x)$.

β) Από τη σχέση $f(2+x) = f(2-x)$ για $x = 1,52$ έχουμε:

$$f(2+1,52) = f(2-1,52) \Leftrightarrow f(3,52) - f(0,48) = 0 \quad (1) \text{ και για } x = 1,48 \text{ έχουμε:}$$

$$f(2+1,48) = f(2-1,48) \Leftrightarrow f(3,48) - f(0,52) = 0 \quad (2)$$

$$\text{Είναι } A = f(3,52) - f(0,52) + f(3,48) - f(0,48) =$$

$$(f(3,52) - f(0,48)) + (f(3,48) - f(0,52)) \stackrel{(1),(2)}{=} 0 + 0 = 0$$

γ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_f με την ευθεία $y = 2x - 5$, είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$f(x) = 2x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 2x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 10 = 0 \text{ που είναι αδύνατη αφού έχει διακρίνουσα}$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = -4 < 0. \text{ Άρα η } C_f \text{ δεν έχει κοινά σημεία με την ευθεία, όταν } \beta = -5.$$

δ) Η C_f έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία μόνο όταν η εξίσωση

$$f(x) = 2x + \beta \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 - 2x - \beta = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 - \beta = 0 \text{ έχει τουλάχιστον μία λύση.}$$

Επειδή η εξίσωση είναι 2^{ου} βαθμού, έχει τουλάχιστον μία λύση αν και μόνο αν

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (5 - \beta) \geq 0 \Leftrightarrow 36 - 20 + 4\beta \geq 0 \Leftrightarrow 4\beta \geq -16 \Leftrightarrow \beta \geq -4 \text{ οπότε η ζητούμενη}$$

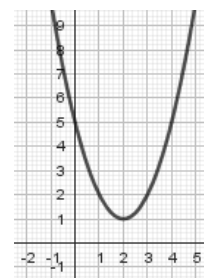
μικρότερη τιμή του β είναι η τιμή $\beta = -4$.

13091. Στο διπλανό παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

α) Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 7$ και στη συνέχεια να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας.

β) i. Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = \lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο β) i.



γ) Έστω ότι μια ευθεία $y = \lambda$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία με τετμημένες x_1, x_2 , με $x_1 < x_2$. Να δείξετε ότι $x_1 + x_2 = 4$.

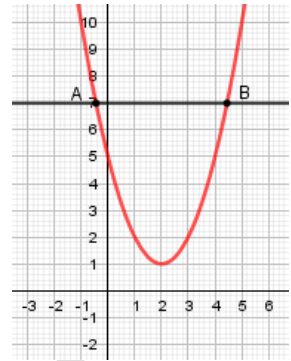
Λύση

α) Φέρνουμε την ευθεία $y = 7$ και διαπιστώνουμε ότι τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία A και B.

Οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_f με την ευθεία $y = 7$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 7$.

$$\text{Είναι } f(x) = 7 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 7 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 2 = 0$$

Η τελευταία είναι 2^{ου} βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 24 > 0$, οπότε η εξίσωση έχει δύο λύσεις, άρα η C_f τέμνει την ευθεία $y = 7$ σε δύο σημεία.



β) i. Η ευθεία $y = \lambda$ είναι παράλληλη στον $x'x$ και τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $(0, \lambda)$. Από το σχήμα βλέπουμε ότι το πλήθος των κοινών σημείων της C_f με την ευθεία $y = \lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, εξαρτάται από το αν η τιμή του λ είναι μεγαλύτερη, μικρότερη ή ίση με 1, διότι με βάση το σχήμα βλέπουμε ότι η μικρότερη τιμή της συνάρτησης είναι 1.

- Αν $\lambda < 1$ η ευθεία $y = \lambda$ δεν έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f ,
- Αν $\lambda = 1$ η ευθεία $y = \lambda$ έχει ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της f ,
- Αν $\lambda > 1$ η ευθεία $y = \lambda$ έχει δύο κοινά σημεία με τη C_f .

ii. Το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = \lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, είναι το ίδιο με το πλήθος των διαφορετικών λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \lambda$.

$$\text{Είναι } f(x) = \lambda \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 - \lambda = 0.$$

Η εξίσωση είναι 2^{ου} βαθμού ως προς x με διακρίνουσα

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (5 - \lambda) = 16 - 20 + 4\lambda = 4\lambda - 4 = 4(\lambda - 1)$$

Το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης εξαρτάται από το πρόσημο της διακρίνουσας.

- Αν $\Delta > 0 \Leftrightarrow 4(\lambda - 1) > 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 > 0 \Leftrightarrow \lambda > 1$ τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες, οπότε η C_f έχει δύο κοινά σημεία με την ευθεία $y = \lambda$.
- Αν $\Delta < 0 \Leftrightarrow \lambda < 1$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη, οπότε η C_f δεν έχει κοινά σημεία με την ευθεία $y = \lambda$.
- Αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ τότε η εξίσωση έχει μία ρίζα, οπότε η C_f έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την ευθεία $y = \lambda$.

γ) Επειδή η ευθεία $y = \lambda$ τέμνει την C_f σε δύο σημεία με τετμημένες x_1, x_2 , με $x_1 < x_2$, συμπεραίνουμε ότι $\lambda > 1$ και τα x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = \lambda \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 - \lambda = 0$.

Από τους τύπους του Vieta προκύπτει ότι $S = x_1 + x_2 = -\frac{-4}{1} = 4$.

13298. Τα σημεία A και B είναι σημεία του 1^{ου} τεταρτημόριου και είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο $y = x$ της 1^{ης} και 3^{ης} γωνίας των αξόνων, όπως φαίνεται στο σχήμα.

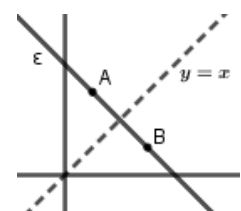
α) Αν $A(x_A, y_A)$ και $B(x_B, y_B)$ να γράψετε τη σχέση που συνδέει τις συντεταγμένες του σημείου A με τις συντεταγμένες του σημείου B.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε που διέρχεται από τα A και B έχει κλίση $\alpha = -1$.

γ) Αν επιπλέον τα σημεία A και B έχουν συντεταγμένες $(4, \kappa^2 - 3\kappa + 1)$ και $(\kappa - 2, 4)$ αντίστοιχα, τότε:

i. Να δείξετε ότι $\kappa = 3$ και να προσδιορίσετε τα σημεία A και B.

ii. Για $\kappa = 3$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε .



Λύση

α) Αφού τα σημεία A και B είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο του $1^{\text{ου}}$ και του $3^{\text{ου}}$ τεταρτημόριου θα ισχύει $x_B = y_A$ και $x_A = y_B$.

β) Η κλίση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία A, B δίνεται από τη σχέση: $\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Λόγω του α σκέλους όμως είναι: $\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{x_A - x_B}{x_B - x_A} = \frac{-(x_B - x_A)}{x_B - x_A} = -1$

γ) i. Επειδή $y_A = x_B$, είναι $\kappa^2 - 3\kappa + 1 = \kappa - 2 \Leftrightarrow \kappa^2 - 4\kappa + 3 = 0$

Η τελευταία είναι εξίσωση $2^{\text{ου}}$ βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 4$ και ρίζες $\kappa_1 = \frac{4 + \sqrt{4}}{2} = 3$, $\kappa_2 = \frac{4 - \sqrt{4}}{2} = 1$

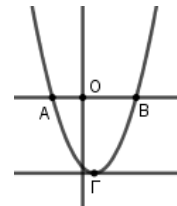
Για $\kappa = 3$ είναι $y_A = 3^2 - 3 \cdot 3 + 1 = 1$ και $x_B = 3 - 2 = 1$ δεκτές τιμές

Για $\kappa = 1$ είναι $y_A = 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = -1$ απορρίπτεται γιατί επειδή τα A, B βρίσκονται στο 1^{o} τεταρτημόριο είναι $y_A > 0$.

Οπότε, τα σημεία A και B έχουν συντεταγμένες $(4, 1)$ και $(1, 4)$ αντίστοιχα.

ii. Η ευθεία ε έχει εξίσωση της μορφής $y = ax + \beta$ και κλίση $\alpha = -1$, άρα $y = -x + \beta$. Επειδή διέρχεται από το σημείο $A(4, 1)$, είναι: $1 = -4 + \beta \Leftrightarrow 5 = \beta$, άρα $\varepsilon: y = -x + 5$.

13314. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x - 3$. Αν $A(\alpha, 0)$, $B(\beta, 0)$, $\Gamma(\gamma, \delta)$ σημεία της γραφικής παράστασης της f όπως φαίνεται στο σχήμα και η παράλληλη από το Γ στον $x'x$ έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ένα κοινό σημείο, τότε:



α) Να δείξετε ότι $\alpha = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$ και $\beta = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$.

β) Να δείξετε ότι $f(\sqrt{2}) < 0$.

γ) Να δείξετε ότι $\frac{1 - \sqrt{13}}{2} < \sqrt{2} < \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$.

δ) Να βρείτε τις τιμές των γ και δ .

Λύση

α) Επειδή τα σημεία A, B ανήκουν στη γραφική παράσταση της f , ισχύει ότι $f(\alpha) = 0$ και $f(\beta) = 0$.

Άρα τα α, β είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 3 = 0$

Η εξίσωση είναι $2^{\text{ου}}$ βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 13$ και ρίζες $x_1 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$, $x_2 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$. Επειδή $\alpha < 0$ και

$\beta > 0$, είναι $\alpha = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$ και $\beta = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$.

β) $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - \sqrt{2} - 3 = 2 - \sqrt{2} - 3 = -1 - \sqrt{2} < 0$

γ) Στο σχήμα παρατηρούμε ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \left(\frac{1 - \sqrt{13}}{2}, \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right)$.

Επειδή $f(\sqrt{2}) < 0$, είναι $\sqrt{2} \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$, άρα $\frac{1-\sqrt{13}}{2} < \sqrt{2} < \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

δ) Η παράλληλη από το Γ στον $x'x$ είναι η $y = \delta$ και επειδή έχει με την C_f ένα μόνο κοινό σημείο, η εξίσωση $f(x) = \delta \Leftrightarrow x^2 - x - 3 - \delta = 0$ έχει μία μόνο λύση. Επειδή όμως η εξίσωση αυτή είναι 2^{ου} βαθμού, έχει μοναδική λύση μόνο όταν

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3 - \delta) = 0 \Leftrightarrow 1 + 12 + 4\delta = 0 \Leftrightarrow 4\delta = -13 \Leftrightarrow \delta = -\frac{13}{4}$$

Τότε η εξίσωση γίνεται $x^2 - x - 3 + \frac{13}{4} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 12 + 13 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$(2x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}, \text{ άρα } \gamma = \frac{1}{2}.$$

13367. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = (\omega^2 - 6\omega + 8)x + 2$, όπου $\omega \in \mathbb{R}$.

α) Για τις διάφορες τιμές του $\omega \in \mathbb{R}$ να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$.

β) Αν ο αριθμός ω είναι ακέραιος και η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$ είναι αμβλεία τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\omega = 3$.

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες.

iii. Να σχεδιάσετε την ευθεία ε .

Λύση

α) Για να βρούμε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$, πρέπει να βρούμε το πρόσημο του συντελεστή διεύθυνσης. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε είναι: $\alpha = \omega^2 - 6\omega + 8$. Η

διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta = 36 - 32 = 4$ και οι ρίζες $\omega_1 = \frac{6 + \sqrt{4}}{2} = 4$, $\omega_2 = \frac{6 - \sqrt{4}}{2} = 2$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον διπλανό πίνακα:

• Αν $\omega \in (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$ ο συντελεστής διεύθυνσης α είναι θετικός και κατά συνέπεια η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$ είναι οξεία.

• Αν $\omega \in (2, 4)$ ο συντελεστής διεύθυνσης α είναι αρνητικός και κατά συνέπεια η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$ είναι αμβλεία.

• Αν $\omega = 2$ ή $\omega = 4$ τότε ο συντελεστής διεύθυνσης μηδενίζεται και η ευθεία ε σχηματίζει μηδενική γωνία με τον άξονα $x'x$, είναι δηλαδή παράλληλη στον $x'x$.

β) i. Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα για να σχηματίζει η ευθεία ε αμβλεία γωνία με τον άξονα $x'x$ πρέπει $\omega \in (2, 4)$. Επειδή όμως το ω είναι ακέραιος τότε $\omega = 3$.

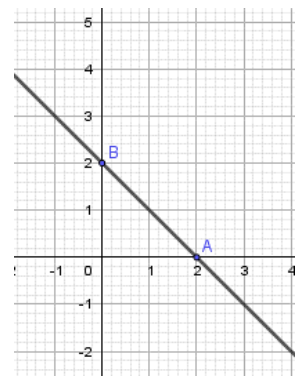
ii. Για $\omega = 3$, $\varepsilon: y = -x + 2$.

Για να βρούμε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$ θέτουμε στην εξίσωσή της $y = 0$.

Δηλαδή $-x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Άρα το σημείο τομής είναι το $A(2, 0)$.

Για να βρούμε το σημείο τομής της ευθείας (ε) με τον άξονα $y'y$, θέτουμε στην εξίσωσή της $x = 0$ και βρίσκουμε $y = 2$. Άρα το σημείο τομής είναι το $B(0, 2)$.

iii. Σημειώνουμε πάνω στους άξονες τα σημεία A και B που βρήκαμε, τα ενώνουμε και σχεδιάζουμε την ευθεία ε όπως στο διπλανό σχήμα.



13473. Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{1 - 2x + x^2}$.

α) Να απλοποιήσετε την παράσταση A.

Δίνεται επιπλέον $1 \leq x \leq 3$.

β) i. Να δείξετε ότι $A=2$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $|x-3| - |x-1| = 2$.

γ) i. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 3 - x$ και $g(x) = x - 1$ για $1 \leq x \leq 3$.

ii. Για ποιες τιμές του x είναι $|f(x) - g(x)| = 2$.

Λύση

$$\alpha) A = \sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{1 - 2x + x^2} = \sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(x-1)^2} \Leftrightarrow$$

$$A = |x-3| + |x-1|$$

β) i. Όταν $1 \leq x \leq 3$ είναι $x-3 \leq 0$ και $x-1 \geq 0$, οπότε

$$A = -x + 3 + x - 1 = 2.$$

ii. Για κάθε $1 \leq x \leq 3$ είναι

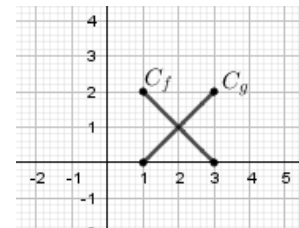
$$|x-3| - |x-1| = 2 \Leftrightarrow 3-x - x+1 = 2 \Leftrightarrow -2x = -2 \Leftrightarrow x=1$$

γ) i. Για την f έχουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	y
1	2
3	0

Για την g έχουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	y
1	0
3	2



ii. Από το σχήμα προκύπτει ότι για κάθε $x \in [1, 2]$ είναι $f(x) > g(x)$, οπότε

$$|f(x) - g(x)| = 2 \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 2 \Leftrightarrow x = 1$$

Για $x \in [1, 3]$ είναι $f(x) < g(x)$, οπότε $|f(x) - g(x)| = 2 \Leftrightarrow g(x) - f(x) = 2 \Leftrightarrow x = 3$

14184. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(x+2)(x+1)^2}{1+(x+2)x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

γ) Αν είναι $f(x) = x+2$, $x \neq -1$, τότε:

i. Να βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνει η γραφική παράσταση της f τη γραφική παράσταση της $g(x) = x^2$.

ii. Να βρείτε τις τιμές του x, για τις οποίες, η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g.

Λύση

$$\alpha) f(x) = \frac{(x+2)(x+1)^2}{1+(x+2)x} = \frac{(x+2)(x+1)^2}{1+x^2+2x} = \frac{(x+2)(x+1)^2}{(x+1)^2}$$

Η f ορίζεται όταν $(x+1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$, άρα $A_f = \mathbb{R} - \{-1\}$.

$$\beta) \text{ Είναι } f(x) = \frac{(x+2)(\cancel{x+1})^2}{(\cancel{x+1})^2} = x+2$$

$\gamma) \text{ i. Για } x \neq -1 \text{ είναι } f(x) = g(x) \Leftrightarrow x+2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ απορρίπτεται ή } x = 2.$

Είναι $f(2) = g(2) = 4$, οπότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τη γραφική παράσταση της $g(x) = x^2$ στο σημείο $(2,4)$.

ii. Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g , όταν $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x+2 > x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 2$.

14320. Σε κάποιο τόπο, μια χειμερινή μέρα, ξεκινάμε να μετράμε τη θερμοκρασία από τις 6 το πρωί και μετά. Ο τύπος που δίνει τη θερμοκρασία, x ώρες μετά τις 6 το πρωί, είναι:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4, & x \in [0,6] \\ 16, & x \in (6,9] \text{ και μετριέται σε βαθμούς Κελσίου.} \\ 25-x, & x \in (9,12] \end{cases}$$

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία στον τόπο αυτό, στις 6 το πρωί, στις 12 το μεσημέρι και στις 5 το απόγευμα.

β) Να βρείτε σε ποιο χρονικό διάστημα της ημέρας η θερμοκρασία:

i. Διατηρείται σταθερή.

ii. Είναι μεγαλύτερη από 14 βαθμούς Κελσίου.

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Λύση

α) Στις 6 το πρωί η θερμοκρασία είναι $f(0) = 2 \cdot 0 + 4 = 4$ βαθμούς Κελσίου. Στις 12 το μεσημέρι η θερμοκρασία είναι $f(6) = 25 - 12 = 13$ βαθμούς Κελσίου και στις 5 το απόγευμα η θερμοκρασία είναι $f(11) = 25 - 11 = 14$ βαθμούς Κελσίου.

β) i. Επειδή για $x \in (6,9)$ είναι $f(x) = 16$, οπότε η θερμοκρασία διατηρείται σταθερή σε αυτό το διάστημα. Όμως επειδή για $x = 0$ είναι 6 το πρωί, το χρονικό διάστημα που η θερμοκρασία είναι σταθερή είναι από τις 12 έως τις 3 το μεσημέρι.

ii. Για $x \in [0,6]$ είναι $f(x) > 14 \Leftrightarrow 2x+4 > 14 \Leftrightarrow 2x > 10 \Leftrightarrow x > 5$, άρα $x \in (5,6]$ και για $x \in (9,12]$ είναι $f(x) > 14 \Leftrightarrow 25-x > 14 \Leftrightarrow x < 11$, άρα $x \in (9,11)$. Επίσης για $x \in (6,9)$ είναι $f(x) = 16 > 14$

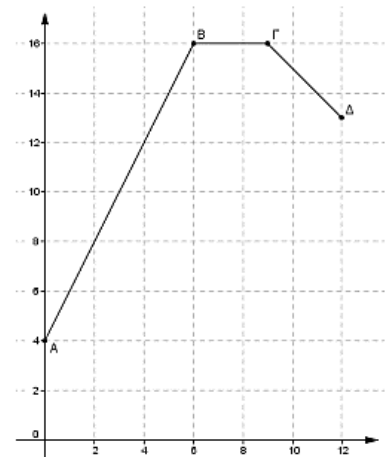
Επομένως η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 14 βαθμούς Κελσίου, ανάμεσα στην 5η και 11η ώρα μετά τις 6 το πρωί, δηλαδή από τις 11 το πρωί μέχρι τις 5 το απόγευμα.

γ) Η γραφική παράσταση C_f της f αποτελείται από τρία ευθύγραμμα τμήματα.

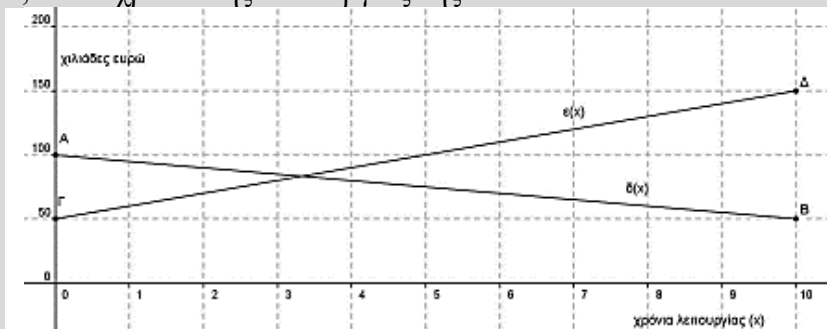
• Το πρώτο τμήμα AB έχει άκρα τα σημεία $A(0, 4)$ και $B(6, 16)$

• Το δεύτερο τμήμα $B\Gamma$ είναι παράλληλο στον άξονα xx' και έχει άκρα το B και το $\Gamma(9, f(9))$ δηλαδή το $\Gamma(9, 16)$

• Το τρίτο τμήμα $\Gamma\Delta$ έχει άκρα το σημείο Γ και το $\Delta(12, f(12))$ δηλαδή το $\Delta(12, 13)$. Η C_f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



14477. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων η ευθεία AB με $A(0,100)$ και $B(10,50)$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\delta(x)$ των ετήσιων δαπανών μίας εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της.



Η ευθεία ΓΔ με $\Gamma(0,50)$ και $\Delta(10,150)$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης των ετήσιων εσόδων $\varepsilon(x)$ της εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της.

Οι γραφικές παραστάσεις αναφέρονται στα δέκα πρώτα χρόνια λειτουργίας της εταιρείας.

α) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να εκτιμήσετε τα έσοδα και τις δαπάνες τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας της εταιρείας.

β) i) Να προσδιορίσετε τους τύπους των συναρτήσεων $\delta(x)$, $\varepsilon(x)$ και να ελέγξετε αν οι εκτιμήσεις σας στο α) ερώτημα ήταν σωστές.

ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών AB και ΓΔ και να τις ερμηνεύσετε στο πλαίσιο του προβλήματος.

Λύση

α) Τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας ($x = 5$), με τη βοήθεια της ευθείας ΓΔ των εσόδων, εκτιμούμε ότι η εταιρεία θα έχει περίπου 100 ευρώ έσοδα ($y = 100$ είναι η τεταγμένη του σημείου της ευθείας ΓΔ με τετμημένη $x = 5$). Τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας ($x = 5$), με τη βοήθεια της ευθείας AB των δαπανών, εκτιμούμε ότι οι δαπάνες της εταιρείας θα είναι περίπου 75 ευρώ ($y = 75$ είναι η τεταγμένη του σημείου της ευθείας AB με τετμημένη $x = 5$).

β) i. Η ευθεία ΓΔ, που αναπαριστά τη συνάρτηση των εσόδων $\varepsilon(x)$, διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(0, 50)$ και $\Delta(10, 150)$ οπότε έχει συντελεστή διεύθυνσης: $\alpha = \frac{150 - 50}{10 - 0} = \frac{100}{10} = 10$ και εξίσωση $y = 10x + 50$. Η ευθεία AB, που αναπαριστά τη συνάρτηση των δαπανών $\delta(x)$, διέρχεται από τα σημεία $A(0, 100)$ και $B(10, 50)$ οπότε έχει συντελεστή διεύθυνσης: $\alpha = \frac{50 - 100}{10 - 0} = \frac{-50}{10} = -5$ και εξίσωση $y = -5x + 100$.

Παρατηρούμε ότι: Το σημείο της ευθείας ΓΔ με τετμημένη $x = 5$ έχει τεταγμένη: $y = 10 \cdot 5 + 50 = 100$. Το σημείο της ευθείας AB με τετμημένη $x = 5$ έχει τεταγμένη: $y = -5 \cdot 5 + 100 = 75$. Επομένως οι εκτιμήσεις που κάναμε ήταν σωστές.

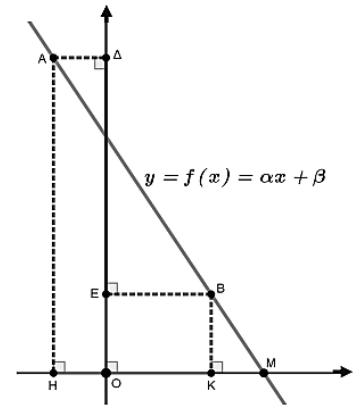
ii. Η τετμημένη του σημείου τομής των ευθειών AB και ΓΔ είναι η λύση της εξίσωσης:

$$10x + 50 = -5x + 100 \Leftrightarrow 15x = 50 \Leftrightarrow x = \frac{50}{15} = \frac{10}{3}.$$

Τότε $y = 10 \cdot \frac{10}{3} + 50 = \frac{250}{3}$. Επομένως μετά από $\frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3}$, δηλαδή 3 χρόνια και $\frac{1}{3} \cdot 12 = 4$ μήνες τα

έσοδα της εταιρείας είναι όσα και οι δαπάνες της ($\frac{250}{3} = 83,3$ χιλιάδες ευρώ).

14556. Στο παρακάτω σχήμα έχει σχεδιασθεί σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x) = ax + \beta$, όπου a, β σταθεροί μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί και $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τα σημεία A και B της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$, των οποίων οι προβολές στους άξονες x' και y' είναι τα σημεία H, Δ και K, E αντίστοιχα. Γνωρίζουμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα HK και ΔE έχουν μήκη 6 και 9 αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι $a = -\frac{3}{2}$.

β) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το σημείο M έχει τετμημένη 6, να αποδείξετε ότι $\beta = 9$.

γ) Υποθέτουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα OK έχει μήκος 4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (δ) η οποία διέρχεται από το σημείο E και είναι παράλληλη προς την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$.

Λύση

α) Έστω $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ τα σημεία του σχήματος.

Είναι $(HK) = 6 \Leftrightarrow x_2 - x_1 = 6$ και $(\Delta E) = 9 \Leftrightarrow f(x_1) - f(x_2) = 9 \Leftrightarrow ax_1 + \beta - (ax_2 + \beta) = 9 \Leftrightarrow$

$$ax_1 + \beta - ax_2 - \beta = 9 \Leftrightarrow a(x_1 - x_2) = 9 \Leftrightarrow -6a = 9 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{2}.$$

β) Το σημείο M έχει συντεταγμένες $M(6, f(6))$. Αφού είναι σημείο του άξονα x' , είναι

$$f(6) = 9 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \cdot 6 + \beta = 0 \Leftrightarrow -9 + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 9.$$

γ) Αφού είναι $(OK) = 4$, τότε και η τετμημένη του σημείου B θα είναι επίσης 4. Άρα η τεταγμένη του σημείου B είναι $y = -\frac{3}{2} \cdot 4 + 9 = 3$, άρα $E(0, 3)$, καθώς τα σημεία E και B έχουν την ίδια τεταγμένη.

Αφού οι ευθείες είναι παράλληλες, θα έχουν την ίδια κλίση $-\frac{3}{2}$.

Έτσι, η εξίσωση της ευθείας (δ) είναι $y = -\frac{3}{2}x + 3$.

33754. Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μία ημέρα, η εταιρεία A χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τον τύπο: $y = 60 + 0,20x$, όπου x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ.

α) Τι ποσό θα πληρώσει ένας πελάτης της εταιρείας A, ο οποίος σε μία ημέρα ταξίδεψε 400 Km ;

β) Πόσα χιλιόμετρα οδήγησε ένας πελάτης ο οποίος, για μία ημέρα, πλήρωσε 150 ευρώ;

γ) Μία άλλη εταιρεία, η B, χρεώνει τους πελάτες της ανά ημέρα σύμφωνα με τον τύπο $y = 80 + 0,10x$ όπου, όπως προηγουμένως, x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ. Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες μας συμφέρει να επιλέξουμε, ανάλογα με την απόσταση που σκοπεύουμε να διανύσουμε.

δ) Αν $f(x) = 60 + 0,20 \cdot x$ και $g(x) = 80 + 0,10 \cdot x$ είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των εταιρειών A και B αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g και να εξηγήσετε τι εκφράζει η τιμή καθεμιάς από αυτές τις συντεταγμένες σε σχέση με το πρόβλημα του ερωτήματος (γ).

Λύση

α) Για $x = 400$: $y = 60 + 0,20 \cdot 400 = 60 + 80 = 140$ ευρώ

β) Για $y = 150$: $150 = 60 + 0,20 \cdot x \Leftrightarrow 0,2 \cdot x = 90 \Leftrightarrow x = \frac{90}{0,2} \Leftrightarrow x = 450 \text{ km}$

γ) Έστω $f(x) = 60 + 0,20 \cdot x$ η συνάρτηση που μας δείχνει πόσο χρεώνει η Α εταιρεία και

$g(x) = 80 + 0,10x$ η συνάρτηση που μας δείχνει πόσο χρεώνει η Β εταιρεία.

$$f(x) - g(x) = 60 + 0,20 \cdot x - 80 - 0,10 \cdot x = 0,1 \cdot x - 20 = 0,1(x - 200)$$

Για $x < 200 \Leftrightarrow f(x) - g(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

Για λιγότερο από 200km συμφέρει να επιλέξουμε την Α εταιρεία

Για ακριβώς 200 km οποιαδήποτε από τις δύο.

Για περισσότερο από 200km συμφέρει να επιλέξουμε την Β εταιρεία.

δ) Για να βρούμε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g λύνουμε την εξίσωση : $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 60 + 0,20 \cdot x = 80 + 0,10 \cdot x \Leftrightarrow 0,1 \cdot x = 20 \Leftrightarrow x = 200 \text{ km}$
 $f(200) = 60 + 0,2 \cdot 200 = 60 + 40 = 100 = g(200)$. Το σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι το $A(200,100)$. Για την τετμημένη 200 έχουμε την ίδια χρέωση και στις δύο εταιρείες.

33894. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{|2 - x|}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = \begin{cases} x - 3, & x > 2 \\ -x + 3, & x < 2 \end{cases}$.

γ) i. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f .

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$.

Λύση

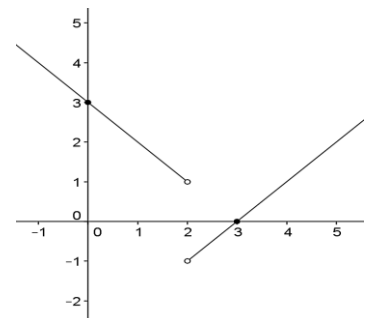
α) Πρέπει $|2 - x| \neq 0 \Leftrightarrow 2 - x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$, άρα : $A_f = \mathbb{R} - \{2\}$

β) Για $x > 2 \Leftrightarrow 2 - x < 0 \Rightarrow |2 - x| = x - 2$ και $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = x - 3$

Για $x < 2 \Leftrightarrow 2 - x > 0 \Rightarrow |2 - x| = -x + 2 = -(x - 2)$ και

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{-(x - 2)} = \frac{(x-2)(x-3)}{-(x-2)} = -(x - 3) = -x + 3.$$

$$\text{Επομένως } f(x) = \begin{cases} x - 3, & x > 2 \\ -x + 3, & x < 2 \end{cases}$$



γ) i.

ii. Τα σημεία τομής γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι τα $A(3,0)$ και $B(0,3)$ αντίστοιχα.

δ) $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (2,3]$.

34183. Σε μια πόλη της Ευρώπης μια εταιρεία TAXI με το όνομα 'RED' χρεώνει 1 ευρώ με την είσοδο στο TAXI και 0,6 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης. Μια άλλη εταιρεία TAXI με το όνομα 'YELLOW' χρεώνει 2 ευρώ με την είσοδο στο TAXI και 0,4 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης. Οι παραπάνω τιμές ισχύουν για αποστάσεις μικρότερες από 15 χιλιόμετρα.

α) i) Αν $f(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία 'RED' για μια διαδρομή x χιλιομέτρων να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

x (km)	0	2	8
$f(x)$ (ευρώ)			

ii) Αν $g(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία 'YELLOW' για μια διαδρομή x χιλιομέτρων να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

x (km)			
$g(x)$ (ευρώ)	2	3,2	4,8

β) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f , g και τους τύπους τους $f(x)$, $g(x)$.

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g και να βρείτε για ποιες αποστάσεις η επιλογή της εταιρείας 'RED' είναι πιο οικονομική, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

δ) Αν δυο πελάτες A και B μετακινηθούν με την εταιρεία 'RED' και ο πελάτης A διανύσει 3 χιλιόμετρα παραπάνω από τον B, να βρείτε πόσο παραπάνω θα πληρώσει ο A σε σχέση με τον B.

Λύση

α) i) Για $x = 0$ πληρώνουμε μόνο την είσοδο στο TAXI, 1 ευρώ.

Για $x = 2$ πληρώνουμε 1 ευρώ για την είσοδο και $0,6 \cdot 2 = 1,2$ ευρώ για τη διαδρομή, άρα συνολικά $1 + 1,2 = 2,2$ ευρώ.

Όμοια για $x = 8$ πληρώνουμε $1 + 0,6 \cdot 8 = 1 + 4,8 = 5,8$ ευρώ

x (km)	0	2	8
$f(x)$ (ευρώ)	1	2,2	5,8

ii) Για να πληρώσουμε 2 ευρώ που είναι η είσοδος στο TAXI, δεν έχουμε κάνει καθόλου χιλιόμετρα, άρα $x = 0$.

Για να πληρώσουμε $g(x) = 3,2$ ευρώ, αν αφαιρέσουμε τα 2 ευρώ της εισόδου, για τη διαδρομή πληρώνουμε 1,2 ευρώ.

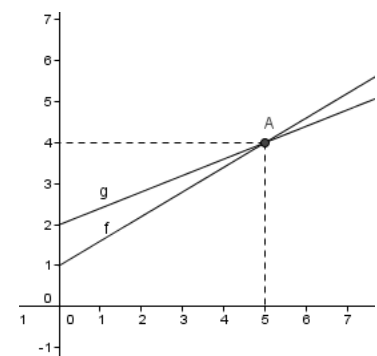
Άρα $0,4 \cdot x = 1,2 \Leftrightarrow x = \frac{1,2}{0,4} \Leftrightarrow x = 3$ χιλιόμετρα. Όμοια αφαιρούμε 2 ευρώ της εισόδου και μένουν 2,8

x (km)	0	3	7
$g(x)$ (ευρώ)	2	3,2	4,8

ευρώ για τη διαδρομή. Άρα $0,4 \cdot x = 2,8 \Leftrightarrow x = \frac{2,8}{0,4} \Leftrightarrow x = 7$

β) Για τη διαδρομή x χιλιομέτρων στην 'RED' πληρώνουμε $0,6x$ για τη διαδρομή και 1 ευρώ με την είσοδο, άρα $f(x) = 0,6x + 1$, x σε km. Για τη διαδρομή x χιλιομέτρων στην 'YELLOW' πληρώνουμε $0,4x$ για τη διαδρομή και 2 ευρώ με την είσοδο, άρα $g(x) = 2 + 0,4 \cdot x$, x σε km. Είναι $A_f = A_g = [0, +\infty)$

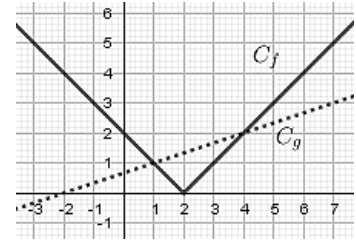
γ) Για την C_f σχεδιάζουμε την ημιευθεία που έχει αρχή το $(0,1)$ και διέρχεται από το $(2,2,2)$. Για την C_g σχεδιάζουμε την ημιευθεία που έχει αρχή το $(0,2)$ και διέρχεται από το $(3,3,2)$. Όπως φαίνεται από το σχήμα η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g στο διάστημα $(0,5)$, οπότε για διαδρομή μικρότερης των 5 χιλιομέτρων η εταιρεία 'RED' είναι πιο οικονομική.



δ) Έστω x_A τα χιλιόμετρα που διάνυσε ο πελάτης A και x_B τα χιλιόμετρα που διάνυσε ο πελάτης B. Τότε $x_A - x_B = 3$ (1)

$g(x_A) - g(x_B) = 0,6x_A - 1 - 0,6x_B - 1 = 0,6(x_A - x_B) = 0,6 \cdot 3 \Leftrightarrow g(x_A) - g(x_B) = 1,8$
Άρα ο πελάτης A θα πληρώσει παραπάνω 1,8 ευρώ.

34312. Στο διπλανό σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με $f(x) = |x - 2|$ και $g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, x \in \mathbb{R}$.



α) Με βάση το σχήμα να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των C_f και C_g .

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα α).

γ) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων, να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g .

δ) Με τη βοήθεια του ερωτήματος γ), να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση: $K = \sqrt{3|2 - x| - (x + 2)}$.

Λύση

α) Τα σημεία τομής των C_f και C_g είναι $A(1, 1)$ και $B(4, 2)$.

β) Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g λύνουμε την εξίσωση $f(x) = g(x) \Leftrightarrow |x - 2| = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \Leftrightarrow |3x - 6| = x + 2$

Αν $x \leq -2$: αδύνατη

Αν $x > -2$: $3x - 6 = x + 2 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4$ ή $3x - 6 = -x - 2 \Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1$

Είναι $f(1) = g(1) = 1$, $f(4) = g(4) = 2$, άρα τα κοινά σημεία τους είναι τα $A(1, 1)$ και $B(4, 2)$.

γ) Η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g για κάθε $x \in (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$

δ) Πρέπει : $3|2 - x| - (x + 2) \geq 0 \Leftrightarrow |x - 2| \geq \frac{1}{3}(x + 2) \Leftrightarrow$

$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$ (γ ερώτημα)

36652. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 4x + 2$ και $g(x) = 4x^2 - 9$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $x'x$.

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία $(3, 0)$ και $(-3, 0)$.

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω σε κάποιον από τους άξονες.

δ) Να βρείτε συνάρτηση h της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία, διέρχεται από το $A(0, 3)$ και τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημείο του ημιάξονα Ox .

Λύση

α) Για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της g με τον άξονα $x'x$ λύνουμε την

εξίσωση : $g(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x = \pm \frac{3}{2}$

Άρα τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της g με τον άξονα $x'x$ είναι τα σημεία

$A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ και $B\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$.

β) Τα σημεία $(3, 0)$ και $(-3, 0)$ ανήκουν στον άξονα $x'x$. Από το α) ερώτημα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ μόνο στο σημείο B . Άρα δεν τέμνει τους άξονες (τον $x'x$) σε κάποιο από τα σημεία $(3, 0)$ και $(-3, 0)$.

0) και $(-3, 0)$.

γ) Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0,2)$

Η γραφική παράσταση της g τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $\Delta(0,-9)$.

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 9 \Leftrightarrow \frac{4x^2}{4} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x = \pm \frac{3}{2}$$

Άρα τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ είναι τα σημεία

$E\left(\frac{3}{2}, 0\right), Z\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$. Επομένως τα κοινά σημεία των συναρτήσεων f και g δεν βρίσκονται πάνω στους άξονες.

δ) Έστω $h(x) = ax + \beta$. Επειδή η γραφική παράσταση της h διέρχεται από το σημείο A έχουμε :

$3 = a \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 3$. Επειδή η γραφική παράσταση της h τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημείο

του ημιάξονα Ox , δηλαδή στο σημείο $E\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, ισχύει ότι:

$$0 = a \cdot \frac{3}{2} + \beta \Leftrightarrow 0 = a \cdot \frac{3}{2} + 3 \Leftrightarrow 3a + 6 = 0 \Leftrightarrow 3a = -6 \Leftrightarrow a = -2. \text{ Επομένως } h(x) = -2x + 3.$$

36655. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

γ) Αν A και B είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα A και B .

Λύση

α) Πρέπει : $9 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 9 \Leftrightarrow |x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$, άρα $A_f = (-3, 3)$.

β) Για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ λύνουμε την

$$\text{εξίσωση : } f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}} = 0 \Leftrightarrow x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

Άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ είναι το σημείο $A(-2, 0)$. Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $y'y$ είναι τα σημεία $(0, f(0))$.

Είναι $f(0) = \frac{0+2}{\sqrt{9-0^2}} = \frac{2}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$, άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $y'y$

είναι το σημείο $B\left(0, \frac{2}{3}\right)$.

γ) Έστω $(\varepsilon) : y = ax + \beta$ η ζητούμενη ευθεία.

Τότε επειδή το σημείο A ανήκει στην ευθεία, έχουμε: $0 = -2a + \beta$ (1) και επειδή το σημείο B ανήκει στην

$$(\varepsilon) : \frac{2}{3} = a \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = \frac{2}{3} \quad (2).$$

$$(1) \Rightarrow -2a + \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow -4a + 2 = 0 \Leftrightarrow -4a = -2 \Leftrightarrow a = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}. \text{ Άρα } (\varepsilon) : y = \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}$$

36659. Ένας αθλητής κολυμπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες.

α) Αν ο αθλητής θέλει να κολυμπήσει ύπτιο 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες.

β) Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.

ι) Αν x είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει

$$360 \text{ θερμίδες είναι: } f(x) = 30 - \frac{3}{4}x.$$

ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του ερωτήματος β(ι), στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος.

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος (β), να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος.

Λύση

Με τα δεδομένα του προβλήματος η συνάρτηση που δείχνει τις θερμίδες που καίγονται με την πάροδο του χρόνου όταν κολυμπάει ύπτιο έχει τύπο $\alpha(x) = 9x$, (x ο χρόνος σε λεπτά) και η συνάρτηση που δείχνει τις θερμίδες που καίγονται με την πάροδο του χρόνου όταν κολυμπάει πεταλούδα έχει τύπο $\beta(x) = 12x$, (x ο χρόνος σε λεπτά).

α) Όταν κολυμπάει ύπτιο 32 λεπτά καίει $\alpha(32) = 9 \cdot 32 = 288$ θερμίδες
Πρέπει να κάψει ακόμη $360 - 288 = 72$ θερμίδες κολυμπώντας πεταλούδα.
Θα κολυμπήσει δηλαδή 6 λεπτά ($\beta(x) = 72 \Leftrightarrow 12x = 72 \Leftrightarrow x = 6$ λεπτά)

β) ι) Όταν κολυμπάει ύπτιο x λεπτά καίει $\alpha(x) = 9x$ θερμίδες
Όταν κολυμπάει πεταλούδα $f(x) = y$ λεπτά καίει $\beta(y) = 12y$ θερμίδες

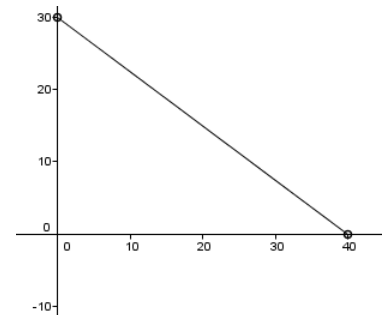
$$\alpha(x) + \beta(y) = 360 \Leftrightarrow 9x + 12y = 360 \stackrel{(:3)}{\Leftrightarrow} 3x + 4y = 120 \Leftrightarrow$$

$$4y = 120 - 3x \Leftrightarrow y = \frac{120 - 3x}{4} \Leftrightarrow y = \frac{120}{4} - \frac{3x}{4} \Leftrightarrow f(x) = 30 - \frac{3}{4}x$$

ii) Είναι $x \geq 0$ και $y \geq 0 \Leftrightarrow 30 - \frac{3}{4}x \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 30 \geq \frac{3}{4}x \Leftrightarrow 120 \geq 3x \Leftrightarrow x \leq 40,$$

άρα $0 \leq x \leq 40$ λεπτά



γ) Τα σημεία τομής με τους άξονες $x'x$, $y'y$ είναι τα σημεία $B(40, 0)$ και $A(0, 30)$ αντίστοιχα. Στο σημείο B κολυμπάει μόνο ύπτιο για να κάψει 360 θερμίδες. Στο σημείο A κολυμπάει μόνο πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.

36681. Για δεδομένο $\lambda \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση f , με $f(x) = (\lambda + 1)x^2 - (\lambda + 1)x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ , η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$.

β) Για $\lambda = -1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

γ) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(2, 0)$, να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ και σε άλλο σημείο.

δ) Για $\lambda = 1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$.

Λύση

α) $f(0) = (\lambda + 1) \cdot 0^2 - (\lambda + 1) \cdot 0 + 2 = 2$, άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$ για οποιαδήποτε τιμή του λ

β) Για $\lambda = -1$ είναι $f(x) = 2$ και η γραφική της παράσταση είναι η οριζόντια ευθεία $y = 2$.

γ) Αφού η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο

$B(2, 0)$ ισχύει ότι: $f(2) = 0 \Leftrightarrow f(2) = (\lambda + 1) \cdot 2^2 - (\lambda + 1) \cdot 2 + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$4(\lambda + 1) - 2\lambda - 2 + 2 = 0 \Leftrightarrow 4\lambda + 4 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = -4 \Leftrightarrow \lambda = -2$$

Για $\lambda = -2$ είναι $f(x) = -x^2 + x + 2$

Για να βρούμε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ και σε άλλο σημείο θα λύσουμε την εξίσωση $f(x) = 0$.

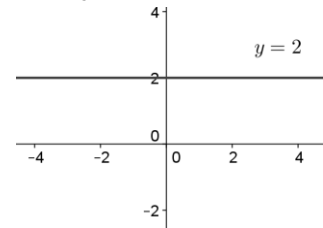
$$\text{Είναι } \Delta = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2 = 9 = 3^2$$

$$\text{Οι ρίζες είναι: } x_1 = \frac{-1+3}{2 \cdot (-1)} = \frac{2}{-2} = -1 \text{ και } x_2 = \frac{-1-3}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Άρα τέμνει τον άξονα $x'x$ και στο σημείο $\Gamma(-1, 0)$.

δ) Για $\lambda = 1$ είναι $f(x) = 2x^2 - 2x + 2$, $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 4 - 16 = -12 < 0$

Άρα $f(x) > 0$ και η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$.



36682. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$.

γ) Έστω $M(x, y)$ σημείο της C_f . Αν για την τετμημένη x του σημείου M ισχύει: $|2x - 1| < 3$, τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$.

Λύση

α) $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$, άρα $x^2 + x + 1 > 0$ και η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$. Άρα δεν τέμνει τον $x'x$.

β) Για να βρούμε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$ λύνουμε την ανίσωση: $f(x) < 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 < 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 < 0$

Οι ρίζες του τριωνύμου $x^2 - x - 2$ είναι οι αριθμοί -1 και 2 .

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον πίνακα

Η λύση της ανίσωσης είναι: $x \in (-1, 2)$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$x^2 - x - 2$	+	o	-	o	+

γ) $|2x - 1| < 3 \Leftrightarrow -3 < 2x - 1 < 3 \Leftrightarrow -2 < 2x < 4 \stackrel{(:2)}{\Leftrightarrow} -1 < x < 2$.

Όπως δείξαμε στο β) ερώτημα το σημείο M βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$

36683. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \begin{cases} -x + 2, & \text{αν } x < 0 \\ x + 2, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα $y'y$.

β) i) Να χαράξετε τη C_f και την ευθεία $y = 3$, και στη συνέχεια να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους.

ii) Να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

- γ) i)** Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού a , η ευθεία $y = a$ τέμνει τη C_f σε δυο σημεία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- ii)** Για τις τιμές του a που βρήκατε στο ερώτημα (γi), να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = a$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος (βii), αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας.

Λύση

α) Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $y'y$ είναι τα σημεία $(0, f(0))$. Είναι $f(0) = 0 + 2 = 2$, άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $y'y$ είναι το σημείο $B(0, 2)$.

β) i) Τα σημεία τομής είναι τα σημεία $A(-1, 3)$ και $B(1, 3)$.

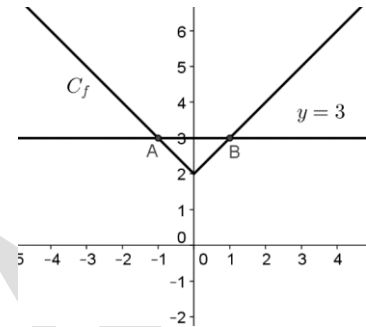
ii) Έχουν ίδια τεταγμένη και αντίθετες τετμημένες. Άρα είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$.

γ) i) Για $a > 2$ (φαίνεται γραφικά)

ii) Για $x < 0$: έχουμε $f(x) = a \Leftrightarrow -x + 2 = a \Leftrightarrow x = 2 - a$ δεκτή αν $a > 2$

Για $x \geq 0$: έχουμε $f(x) = a \Leftrightarrow x - 2 = a \Leftrightarrow x = a + 2$ δεκτή αν $a \geq -2$

Επομένως για $a > 2$ έχουμε δύο σημεία τομής τα $\Gamma(2-a, a)$ και $\Delta(a+2, a)$.



36684. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , με $f(x) = x^2 - 2x$ και $g(x) = 3x - 4$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g .

γ) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y = a$, $a < -1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f .

Λύση

α) Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g λύνουμε την εξίσωση $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 2x = 3x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 4$

Είναι $f(1) = g(1) = -1$, $f(4) = g(4) = 8$, άρα τα κοινά σημεία τους είναι τα $A(1, -1)$ και $B(4, 4)$.

β) Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g λύνουμε την ανίσωση: $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x^2 - 2x < 3x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 < 0$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον πίνακα

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$	
$x^2 - 5x + 4$	+	○	-	○	+

Η λύση της ανίσωσης είναι: $x \in (1, 4)$

γ) Πρέπει $f(x) > a \Leftrightarrow x^2 - 2x > a \Leftrightarrow x^2 - 2x - a > 0$ ισχύει αφού

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-a) = 4 + 4a = 4(1 + a) < 0 \quad (a < -1)$$

37203. Μια μικρή εταιρεία πουλάει βιολογικό ελαιόλαδο στο διαδίκτυο.

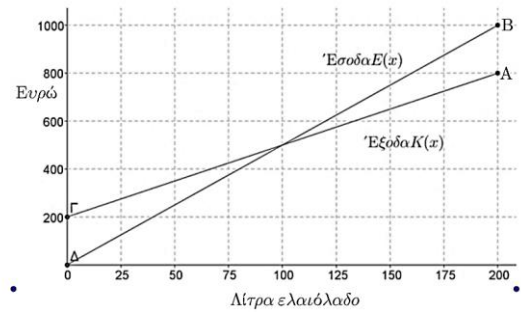
Στο παρακάτω σχήμα, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης που περιγράφει τα έξοδα $K(x)$ και τα έσοδα $E(x)$ από την πώληση x λίτρων λαδιού σε ένα μήνα.

α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών και να ερμηνεύσετε τη σημασία του.

β) Ποια είναι τα αρχικά (πάγια) έξοδα της εταιρείας;

γ) Πόσα λίτρα ελαιόλαδο πρέπει να πουλήσει η εταιρεία για να μην έχει ζημιά;

δ) Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων $K(x)$ και $E(x)$ και να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος (γ).



Λύση

α) Οι συντεταγμένες του σημείου τομής είναι $(100, 500)$, δηλαδή όταν πουλήσει 100 λίτρα λάδι δεν θα έχει ούτε κέρδος ούτε ζημιά.

β) Τα αρχικά έξοδα της εταιρείας είναι : $K(0) = 200$ ευρώ

γ) Για μην έχει ζημιά πρέπει Έσοδα περισσότερα από τα έξοδα, δηλαδή:

$$E(x) > K(x) \Leftrightarrow x > 100 \text{ λίτρα}$$

δ) Η ευθεία που περιγράφει τα έσοδα είναι της μορφής $y = ax$ αφού διέρχεται από την αρχή των αξόνων . Το σημείο $B(200, 1000)$ ανήκει στην ευθεία αυτή. Άρα οι συντεταγμένες του την επαληθεύουν :

$$1000 = a \cdot 200 \Leftrightarrow a = \frac{1000}{200} \Leftrightarrow a = 5 \quad (1)$$

Επομένως ο τύπος της $E(x)$ είναι : $E(x) = 5x$. Η ευθεία που περιγράφει τις ετήσιες δαπάνες είναι της μορφής $y = \beta x + \gamma$.

Τα σημεία $\Gamma(0, 200)$, $A(200, 800)$ ανήκουν στην ευθεία αυτή. Άρα οι συντεταγμένες τους την επαληθεύουν :

$$200 = \beta \cdot 0 + \gamma \Leftrightarrow \gamma = 200 \quad (2)$$

$$800 = \beta \cdot 200 + \gamma \Leftrightarrow 200\beta + 200 = 800 \Leftrightarrow 200\beta = 600 \Leftrightarrow \beta = \frac{600}{200} \Leftrightarrow \beta = 3$$

Επομένως ο τύπος της $K(x)$ είναι : $K(x) = 3x + 200$

$$E(x) > K(x) \Leftrightarrow 5x > 3x + 200 \Leftrightarrow 2x > 200 \Leftrightarrow x > 100 \text{ λίτρα}$$

Άρα οι εκτιμήσεις στο α) ερώτημα ήταν σωστές.

Θέμα 3ο

14576. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{2x^2 - 6|x|}{2|x| - 6}$.

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = |x|$, για κάθε $x \in A$.

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x > 0$.

Λύση

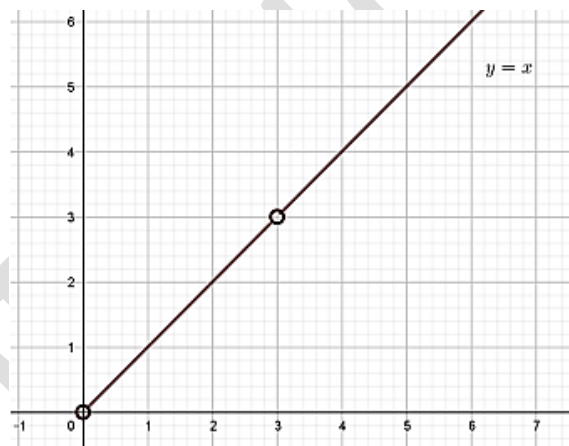
α) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει $2|x| - 6 \neq 0 \Leftrightarrow 2|x| \neq 6 \Leftrightarrow |x| \neq 3 \Leftrightarrow x \neq \pm 3$. Άρα $A = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$.

β) Για κάθε $x \neq \pm 3$ είναι:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 6|x|}{2|x| - 6} = \frac{2|x|^2 - 6|x|}{2|x| - 6} = \frac{|x|(2|x| - 6)}{2|x| - 6} = |x|.$$

γ) Η συνάρτηση f για $x > 0$ έχει τύπο $f(x) = x$ της οποίας η γραφική παράσταση είναι ημιευθεία η οποία έχει αρχή την αρχή των αξόνων (όμως το $(0, 0)$ θα εξαιρεθεί από τη γραφική παράσταση, αφού $x > 0$). Από την ευθεία θα εξαιρεθεί επίσης το σημείο $(3, 3)$, διότι $3 \notin A$.

Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

**1ο θέμα**

14829. α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Αν $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ τότε $\alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$.

ii. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, ισχύει $|-a| = a$.

iii. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τον άξονα $y'y$.

iv. Αν το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$ διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $b^2 - 4a\gamma > 0$.

v. Αν οι ευθείες $\epsilon_1 : y = \alpha_1 x + \beta_1$ και $\epsilon_2 : y = \alpha_2 x + \beta_2$ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, τότε $\alpha_1 = \alpha_2$ και $\beta_1 \neq \beta_2$.

β) Να αποδείξετε ότι τρεις αριθμοί α , β και γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$.

Λύση

α) i. Λ ii. Λ iii. Σ iv. Λ v. Σ

β) Έστω ότι η αριθμητική πρόοδος έχει διαφορά ω , τότε $\beta = \alpha + \omega \Leftrightarrow \beta - \alpha = \omega$ και $\gamma = \beta + \omega \Leftrightarrow \gamma - \beta = \omega$.

Επομένως $\beta - \alpha = \gamma - \beta \Leftrightarrow 2\beta = \alpha + \gamma \Leftrightarrow \beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$.

Αντιστρόφως αν για τρεις αριθμούς α, β, γ ισχύει $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$, τότε έχουμε

$2\beta = \alpha + \gamma \Leftrightarrow \beta + \beta = \alpha + \gamma \Leftrightarrow \beta - \alpha = \gamma - \beta$ που σημαίνει ότι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

14731.A. Σε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις να επιλέξετε Σωστό (Σ), αν η πρόταση που διατυπώνεται είναι σωστή και Λάθος (Λ), αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \geq 0$ ισχύει ότι $\sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$.

β) Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει ότι $|\alpha + \beta| \leq |-\alpha| + |\beta|$.

γ) Κάθε ευθεία η οποία έχει θετική κλίση, σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ οξεία γωνία.

δ) Η εξίσωση $x^3 = -8$ είναι αδύνατη στους πραγματικούς αριθμούς.

ε) Αν είναι $\alpha\beta > 1$, τότε θα ισχύει αναγκαστικά $\alpha > 1$ και $\beta > 1$.

B. Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$. Αν έχει δύο πραγματικές ρίζες x_1, x_2 , τότε να αποδείξετε ότι το άθροισμά τους είναι ίσο με $x_1 + x_2 = \frac{-\beta}{\alpha}$.

Λύση

A. α) Λ **β)** Σ **γ)** Σ **δ)** Λ **ε)** Λ

B. Απόδειξη στην παράγραφο 3.3 του σχολικού βιβλίου σελ.90